BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

ĐỖ LÂN

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA MỘT SỐ HỆ VI PHÂN ĐA TRỊ TRONG KHÔNG GIAN VÔ HẠN CHIỀU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

ĐỖ LÂN

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA MỘT SỐ HỆ VI PHÂN ĐA TRỊ TRONG KHÔNG GIAN VÔ HẠN CHIỀU

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS Trần Đình Kế

Hà Nội - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Trần Đình Kế. Các kết quả được phát biểu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Nghiên cứu sinh

Đỗ Lân

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được thực hiện tại Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, dưới sự hướng dẫn nghiêm khắc, tận tình, chu đáo của PGS. TS. Trần Đình Kế. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy, người đã dẫn dắt tác giả vào một hướng nghiên cứu tuy khó khăn, vất vả nhưng thực sự thú vị và có ý nghĩa.

Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng Sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán- Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là các thầy giáo, cô giáo trong Bộ môn Giải tích đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Ban Giám hiệu trường Đại học Thủy Lợi, các đồng nghiệp tại Bộ môn Toán học, Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Thủy lợi đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin dành cho gia đình, những người luôn yêu thương, chia sẻ, động viên tác giả vượt qua khó khăn để hoàn thành luận án.

Tác giả

Mục lục

Lời cam đoan 1

Lời cảm ơn 2

Mục lục 3

MỞ ĐẦU 5

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 15

1.1. CÁC KHÔNG GIAN HÀM 15

1.2. LÍ THUYẾT NỬA NHÓM 16

1.2.1. Nửa nhóm liên tục mạnh và các trường hợp đặc biệt . . 16

1.2.2. Nửa nhóm tích phân 19

1.3. ĐỘ ĐO KHÔNG COMPACT (MNC) VÀ CÁC ƯỚC LƯỢNG ĐỘ ĐO 23

1.4. ÁNH XẠ NÉN VÀ CÁC ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO ÁNH XẠ ĐA TRỊ 28

1.5. TẬP HÚT TOÀN CỤC CHO NỬA DÒNG ĐA TRỊ 30

1.6. GIẢI TÍCH BẬC PHÂN SỐ 31

1.6.1. Đạo hàm và tích phân bậc phân số 31

1.6.2. Công thức nghiệm cho bài toán với phương trình vi phân bậc phân số 32

Chương 2. DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA MỘT LỚP BAO HÀM THỨC VI PHÂN HÀM NỬA TUYẾN TÍNH 35

2.1. ĐẶT BÀI TOÁN 35
2.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TÍCH PHÂN 36
2.3. SỰ TỒN TẠI TẬP HÚT TOÀN CỤC 44
2.4. ÁP DỤNG 50
2.4.1. Bao hàm thức trong miền bị chặn 50
2.4.2. Bao hàm thức trong miền không bị chặn 52

Chương 3. NGHIỆM ĐỐI TUẦN HOÀN CỦA BAO HÀM THỨC VI PHÂN NỬA TUYẾN TÍNH 56
3.1. ĐẶT BÀI TOÁN 56
3.2. SỰ TỒN TẠI CỦA LỚP NGHIỆM ĐỐI TUẦN HOÀN 56
3.3. ÁP DỤNG 68
3.3.1. Ví dụ 1 68
3.3.2. Ví dụ 2 70

Chương 4. TÍNH ỔN ĐỊNH YẾU CỦA HỆ VI PHÂN BẬC PHÂN SỐ NỬA TUYẾN TÍNH 73
4.1. ĐẶT BÀI TOÁN 73
4.2. KHÔNG GIAN HÀM VÀ ĐỘ ĐO 74
4.3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TRÊN NỬA TRỤC 78
4.4. TÍNH ỔN ĐỊNH YẾU 90
4.5. ÁP DỤNG 93
4.6. TRƯỜNG HỢP BÀI TOÁN ĐƠN TRỊ 100

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN 108

TÀI LIỆU THAM KHẢO 109

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Thuật ngữ hệ vi phân đa trị được dùng để chỉ các bài toán với bao hàm thức vi phân hoặc các phương trình vi phân (đạo hàm riêng) mà tính duy nhất nghiệm của nó bị phá vỡ. Các hệ vi phân đa trị không chỉ là mô hình tổng quát của phương trình vi phân mà còn xuất phát từ nhiều bài toán quan trọng, trong đó có thể kể đến bài toán điều khiển phản hồi đa trị, bài toán chính quy hóa phương trình vi phân với phần phi tuyến không liên tục, các bất đẳng thức vi biến phân. Nghiên cứu dáng điệu nghiệm của bao hàm thức tiến hóa trong phạm vi luận án này bao gồm các câu hỏi về tính ổn định (hoặc ổn định yếu) của nghiệm, sự tồn tại tập hút của hệ động lực sinh bởi tập nghiệm và các lớp nghiệm đặc biệt (nghiệm đối tuần hoàn, nghiệm phân rã).

Các bao hàm thức tiến hóa trong không gian hữu hạn chiều đã được nghiên cứu từ khá sớm. Các kết quả về tính giải được và cấu trúc tập nghiệm đã được trình bày một cách hệ thống trong các cuốn sách chuyên khảo [9, 32]. Tiếp theo đó, bao hàm thức tiến hóa trong không gian Banach tổng quát và ứng dụng của nó trở thành chủ đề nghiên cứu có tính thời sự trong hơn một thập kỷ qua. Các cuốn sách chuyên khảo theo hướng này có thể kể đến [42, 72].

Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm là một trong những vấn đề trung tâm của lí thuyết định tính phương trình vi tích phân. Công cụ để nghiên cứu dáng điệu nghiệm của các hệ vi phân (đạo hàm riêng) là đa dạng tùy theo đặc trưng từng hệ. Đối với các phương trình vi phân thường, lí thuyết ổn định Lyapunov là công cụ hữu hiệu để giải quyết vấn đề này. Ngoài ra, một

số phương pháp khác như phương pháp so sánh (xem [58]), phương pháp điểm bất động (xem [19]) cũng được sử dụng. Trong khi đó, để nghiên cứu dáng điệu nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng, người ta thường sử dụng lí thuyết tập hút toàn cục (xem [27]).

Các kết quả cùng với các lược đồ nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của các hệ vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng đã được phát triển cho các bao hàm thức vi phân. Do tính chất không duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy ứng với bao hàm thức tiến hóa, lí thuyết ổn định Lyapunov không khả dụng trong việc nghiên cứu tính ổn định của nghiệm dừng. Đối với các bao hàm thức tiến hóa trong không gian hữu hạn chiều, khái niệm ổn định yếu đã được đề xuất bởi Filippov năm 1988 (xem [36]) và phương pháp hàm Lyapunov cải tiến để chứng minh tính ổn định yếu cho bao hàm thức tiến hóa đã được trình bày trong [2]. Đối với các bao hàm thức tiến hóa trong không gian vô hạn chiều, cách tiếp cận thường được sử dụng nhất là lí thuyết tập hút.

Trong vài thập kỷ trở lại đây, lí thuyết tập hút toàn cục phát triển mạnh mẽ và thu được rất nhiều kết quả có tính hệ thống (xem tài liệu chuyên khảo [65]). Đối với các hệ vi phân đa trị, lí thuyết tập hút cũng tương đối hoàn thiện với nhiều lược đồ nghiên cứu. Trong đó đáng chú ý nhất là lí thuyết tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị được giới thiệu bởi Melnik và Valero năm 1998 (xem [52]) cùng với lí thuyết nửa dòng suy rộng của Ball [11, 12]. Những đánh giá, so sánh về hai phương pháp này đã được Caraballo phân tích trong [22]. Ngoài ra còn có lí thuyết hút quỹ đạo được phát triển bởi Chepyzov và Vishik năm 1997 (xem [28]), đây cũng là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu dáng điệu nghiệm của các hệ đạo hàm riêng mà tính duy nhất nghiệm không được bảo đảm. Tiếp sau đó lí thuyết tập hút lùi, tập hút đều cho các hệ động lực đa trị cũng được xây dựng để làm việc với các hệ vi phân không ô-tô-nôm (xem [23, 24, 53]). Đặc biệt, trong các năm 2014-2015, những cải tiến đáng kể cho lí

thuyết tập hút đã được công bố trong các công trình [30, 41]. Những kết quả mới nhất này tập trung vào việc giảm nhẹ điều kiện về tính liên tục và đưa ra tiêu chuẩn compact tiệm cận cho nửa nhóm/nửa quá trình dựa trên độ đo không compact. Tuy nhiên những tiêu chuẩn này khi áp dụng cho các hệ vi phân hàm còn gặp phải nhiều khó khăn về mặt kỹ thuật do không gian pha tương ứng có cấu trúc phức tạp.

Trong luận án này, sử dụng lược đồ của Melnik và Valero, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị sinh bởi lớp bao hàm thức vi phân nửa tuyến tính

$$u'(t) \in Au(t) + F(u(t), u_t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \tag{2}$$

ở đây u là hàm nhận giá trị trong không gian Banach X, u_t là hàm trễ, tức là $u_t(s) = u(t+s)$ với $s \in [-h, 0]$, F là một hàm đa trị xác định trên một tập con của $X \times C([-h, 0]; X)$ và $A : D(A) \subset X \to X$ là một toán tử tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida nhưng xác định không trù mật, tức là $\overline{D(A)} \neq X$.

Như đã đề cập trong [71], trong nhiều bài toán nửa tuyến tính, thành phần phi tuyến nhận giá trị nằm ngoài $\overline{D(A)}$. Khi đó ta cần phải nghiên cứu trường hợp mà toán tử A không xác định trù mật. Ta có thể tìm thấy trong [31] các mô hình cụ thể với toán tử A được xác định không trù mật.

Với giả thiết toán tử A xác định không trù mật và thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida, đã có một số nghiên cứu về tính giải được cũng như tính ổn định nghiệm của bài toán dạng (1)-(2). Cụ thể, các kết quả cho trường hợp F là hàm đơn trị có trong [1, 4, 35, 71]. Trong trường hợp bao hàm thức, có thể kể đến các kết quả [26, 59].

Các kết quả về sự tồn tại tập hút toàn cục cho lớp bài toán (1)-(2) chưa được biết đến nhiều. Trong trường hợp F là hàm đơn trị, điều kiện tồn tại tập hút toàn cục đã được nghiên cứu trong [76] (với trễ hữu hạn) và trong [18] (với trễ vô hạn). Trong các nghiên cứu này, các tác giả đặt ra hai điều kiện sau

- nửa nhóm sinh bởi phần tuyến tính trên $\overline{D(A)}$ là compact;
- hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz.

Khi nghiên cứu lớp bài toán này, chúng tôi cố gắng giảm nhẹ hai điều kiện kể trên trong trường hợp trễ hữu hạn. Cụ thể, nếu $S'(\cdot)$ là không compact, chúng tôi sẽ giả thiết F thỏa mãn một điều kiện chính quy biểu diễn bởi độ đo không compact, điều kiện này được thỏa mãn nếu $F = F_1 + F_2$ với F_1 là một hàm đơn trị có tính chất Lipschitz còn F_2 đa trị và compact.

Trong vài thập kỷ trở lại đây, các phương trình/bao hàm thức tiến hóa bậc phân số đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu bởi các ứng dụng của chúng trong việc mô tả các hiện tượng khoa học, kỹ thuật. Các phương trình vi phân bậc phân số được dùng để mô tả các bài toán ở nhiều lĩnh vực, ví dụ như bài toán về lưu biến học, mạng điện, điện hóa học... Chi tiết hơn, ta có thể xem tại các tài liệu chuyên khảo của Miller và Ross [54], Podlubny [64], và Kilbas và các cộng sự [44]. Gần đây, do tính ứng dụng của đạo hàm bậc phân số trong mô hình hóa đồng thời với sự phát triển của giải tích bậc phân số, nhiều hệ vi phân bậc nguyên được mở rộng thành các mô hình bậc phân số. Theo hướng phát triển này, ta có thể kể tới các kết quả tiêu biểu [57, 83, 84].

Trong luận án, bên cạnh lớp bao hàm thức tiến hóa bậc nhất, chúng tôi nghiên cứu một lớp bao hàm thức tiến hóa bậc phân số $\alpha \in (0, 1)$ với mục tiêu tìm ra các điều kiện chấp nhận được cho tính ổn định của nghiệm dừng. Tuy nhiên với các phương trình/bao hàm thức tiến hóa bậc phân số, cách tiếp cận của lí thuyết tập hút lại không khả dụng khi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm do toán tử nghiệm không có tính chất kiểu nửa nhóm. Hơn nữa, với các bao hàm thức tiến hóa bậc phân số, các khái niệm ổn định theo nghĩa Lyapunov cũng không thể áp dụng được. Do đó, chúng tôi đưa ra khái niệm *Ổn định tiệm cận yếu* của nghiệm tầm thường khi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của lớp bao hàm thức vi phân bậc phân số có xung, với điều kiện không

cục bộ và trễ hữu hạn dạng

$$^{C}D_0^{\alpha}u(t) \in Au(t) + F(t, u(t), u_t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{3}$$

$$\Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \tag{4}$$

$$u(s) + g(u)(s) = \varphi(s),\ s \in [-h, 0], \tag{5}$$

trong đó $^{C}D_0^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$, là đạo hàm bậc phân số theo nghĩa Caputo, A là một toán tử tuyến tính đóng trong X sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $W(\cdot)$, $F : \mathbb{R}^+ \times X \times C([-h, 0]; X) \to \mathcal{P}(X)$ là một ánh xạ đa trị, $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $k \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, I_k và g là các hàm liên tục, u_t là hàm trễ theo thời gian t, tức là $u_t(s) = u(t + s), s \in [-h, 0]$.

Hệ (3)-(5) là dạng tổng quát hóa của bài toán Cauchy có xung (mô tả bởi (4)) và điều kiện ban đầu không cục bộ (điều kiện (5)). Trong các mô hình thực tế, điều kiện không cục bộ cho những mô tả tốt hơn so với điều kiện ban đầu cổ điển, ví dụ, điều kiện

$$u(s) + \sum_{i=1}^{M} c_i u(\tau_i + s) = \varphi(s), s \in [-h, 0],$$

cho phép ta thêm các đo đạc tại các thời điểm khác thời điểm ban đầu. Kết quả đầu tiên và ý nghĩa vật lí cho bài toán không cục bộ có thể xem trong [20]. Các phương trình vi phân với điều kiện ban đầu không cục bộ đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, điển hình là các kết quả [26, 47, 48]. Mặt khác, điều kiện xung (4) được sử dụng để mô tả các hệ động lực có sự thay đổi trạng thái đột ngột tại một số thời điểm, thường gặp trong vật lí, sinh học, kĩ thuật,... Các kết quả cơ bản về phương trình vi phân có xung có thể tìm thấy trong các tài liệu [14, 46].

Gần đây, một số trường hợp riêng của bài toán (3)-(5) dưới dạng bao hàm thức được nghiên cứu rộng rãi. Về sự tồn tại và tính chất tập nghiệm, chúng ta có thể kể tới một số kết quả tiêu biểu trong các công trình [25, 81, 82], trong đó, tính giải được của bài toán được xét trên khoảng compact và cấu trúc của

tập nghiệm dạng R_δ được xem xét. Lớp bài toán điều khiển được ứng với bao hàm thức vi phân bậc phân số cũng được nghiên cứu trong một số bài báo gần đây như [66, 80]. Tuy nhiên, một trong những câu hỏi quan trọng nhất đối với lớp bài toán (3)-(5), đó là tính ổn định của nghiệm chưa được nghiên cứu.

Để nghiên cứu tính ổn định nghiệm cho lớp bài toán này, chúng tôi đưa ra khái niệm ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường: Ký hiệu $\Sigma(\varphi)$ là tập nghiệm của bài toán (3)-(5) ứng với điều kiện ban đầu φ sao cho $0 \in \Sigma(0)$. Nghiệm tầm thường của bài toán (3)-(5) được gọi là ổn định tiệm cận yếu nếu nó thỏa mãn hai điều kiện

1) *ổn định*: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $\|\varphi\|_h < \delta$ thì $\|u_t\|_h < \epsilon$ với mọi $u \in \Sigma(\varphi)$ và $t > 0$, ở đây $\|\cdot\|_h$ ký hiệu chuẩn sup trong $C([-h, 0]; X)$;

2) *hút yếu*: với mọi $\varphi \in \mathcal{B}$, tồn tại $u \in \Sigma(\varphi)$ thỏa mãn $\|u_t\|_h \to 0$ khi $t \to +\infty$.

Chúng tôi nghiên cứu tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường cho hệ (3)-(5) bằng cách sử dụng lý thuyết điểm bất động cho ánh xạ nén trên các không gian hàm phù hợp.

Trong nghiên cứu định tính các hệ vi tích phân, cùng với lí thuyết ổn định, việc tìm các lớp nghiệm đặc biệt, ví dụ như nghiệm tuần hoàn, đối tuần hoàn cũng là hướng nghiên cứu thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Nghiệm đối tuần hoàn của các hệ vi phân được sử dụng trong nhiều quá trình vật lí (có thể xem trong [13, 16, 45]). Một số kết quả về sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho các lớp phương trình tiến hóa tuyến tính và nửa tuyến tính đã được thiết lập, bắt nguồn từ các nghiên cứu của Okochi (xem [60], [61], [62]). Theo hướng này, ta có kể tới các kết quả tiêu biểu của Haraux ([38]), Liu ([49]), Wang ([79]). Năm 2012, bằng cách tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm, Liu [50] chứng minh được sự tồn tại của nghiệm yếu đối tuần hoàn cho lớp bài toán

nửa tuyến tính dạng

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), t \in \mathbb{R},$$
$$u(t+T) = -u(t), t \in \mathbb{R},$$

trong đó, A là toán tử sinh của một C_0-nửa nhóm có tính chất hyperbolic. Từ kết quả này, nhiều kết quả tương tự cho các bài toán dạng trừu tượng trong không gian Banach đã được chứng minh theo cách tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm. Điển hình có thể kể tới các kết quả [29, 51, 56].

Tuy nhiên, các kết quả tương tự cho các bao hàm thức tiến hóa còn ít được biết đến. Sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho những lớp bao hàm thức tiến hóa theo cách tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm là một vấn đề thời sự, có ý nghĩa khoa học và hứa hẹn nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế. Đồng thời, nghiệm có tính chất đối tuần hoàn cũng là một kiểu dáng điệu đặc biệt của nghiệm. Do đó, trong luận án này, sử dụng cách tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm và hàm Lyapunov-Perron đa trị, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm đối tuần hoàn cho lớp bao hàm thức vi phân có dạng đa diện

$$u'(t) \in Au(t) + F(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$
$$u(t+T) = -u(t), t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

trong đó, $F(t, u(t)) = \overline{\text{conv}}\{f_1(t, u(t)), ..., f_n(t, u(t))\}$, ở đây $\overline{\text{conv}}$ là ký hiệu bao lồi đóng; A là toán tử Hille-Yosida có miền xác định $D(A)$ không trù mật sao cho A sinh ra nửa nhóm hyperbolic trong $\overline{D(A)}$. Như ta đã biết, trong các bài toán điều khiển phản hồi, biến điều khiển thường được lấy trong một miền có dạng đa diện. Ngoài ra các hệ vi phân với F có dạng đa diện cho phép mô tả tính "không chắc chắn" của ngoại lực, vì vậy, bài toán (6)-(7) là một bài toán có ý nghĩa khoa học và ứng dụng.

2. Mục đích – Đối tượng – Phạm vi nghiên cứu của luận án

Mục đích của luận án là nghiên cứu tính giải được cũng như dáng điệu tiệm cận nghiệm của một số lớp hệ vi phân đa trị trong không gian vô hạn chiều theo cách tiếp cận của lí thuyết ổn định và lí thuyết tập hút.

Đối tượng nghiên cứu cụ thể của luận án là hai lớp bao hàm thức vi phân nửa tuyến tính bậc một và bậc phân số $\alpha \in (0, 1)$. Phạm vi nghiên cứu của luận án bao gồm những nội dung sau:

- **Nội dung 1:** Nghiên cứu tính giải được và sự tồn tại tập hút toàn cục cho lớp bao hàm thức vi phân mà phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân.

- **Nội dung 2:** Nghiên cứu sự tồn tại lớp nghiệm đối tuần hoàn cho các bao hàm thức vi phân kiểu đa diện mà trong đó phần tuyến tính sinh ra một nửa nhóm tích phân.

- **Nội dung 3:** Nghiên cứu tính giải được trên cả nửa trục và tính ổn định yếu cho lớp bao hàm thức vi phân bậc phân số có xung, với điều kiện không cục bộ và trễ hữu hạn. Đặc biệt trong trường hợp đơn trị, chúng tôi nghiên cứu tính duy nhất của nghiệm phân rã.

Các kết quả nghiên cứu thu được trên các mô hình tổng quát sau đó được áp dụng cho các hệ vi phân thường có trễ và các hệ vi phân đạo hàm riêng trong các miền bị chặn và không bị chặn.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Để nghiên cứu tính giải được của các lớp bài toán phi tuyến, chúng tôi sử dụng lí thuyết nửa nhóm [63], phương pháp ước lượng theo độ đo không compact và các định lí điểm bất động cho ánh xạ đa trị nén [42, 17, 26], kết hợp với các công cụ của giải tích đa trị, giải tích bậc phân số. Trong

trường hợp chứng minh sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn, chúng tôi sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Perron đa trị.

- Để nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị, chúng tôi sử dụng lược đồ của Melnik và Valero [52].

- Để nghiên cứu tính ổn định của bao hàm thức vi phân bậc phân số, chúng tôi sử dụng các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén.

4. Cấu trúc và các kết quả của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình đã công bố và Tài liệu tham khảo, luận án được chia làm bốn chương:

- Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị.* Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các kết quả về lí thuyết nửa nhóm, lí thuyết độ đo không compact (MNC) và ánh xạ nén, các kiến thức về giải tích bậc phân số và lí thuyết tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị.

- Chương 2: *Dáng điệu tiệm cận nghiệm của một lớp bao hàm thức vi phân hàm nửa tuyến tính.* Trong chương này, chúng tôi chứng minh tính giải được và sự tồn tại tập hút toàn cục cho một lớp bao hàm thức vi phân với trễ hữu hạn mà phần tuyến tính của nó sinh ra một nửa nhóm tích phân. Kết quả này mở rộng các kết quả đã biết từ mô hình đơn trị sang mô hình đa trị nhờ sử dụng các kỹ thuật mới về đánh giá độ đo không compact.

- Chương 3: *Nghiệm đối tuần hoàn của bao hàm thức vi phân nửa tuyến tính.* Trong chương này, sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Perron và lí thuyết nửa nhóm chúng tôi chứng minh được sự tồn tại lớp nghiệm đối tuần hoàn của bao hàm thức vi phân dạng đa diện, mà phần tuyến tính sinh ra một nửa nhóm tích phân.

- Chương 4: *Tính ổn định yếu của hệ vi phân bậc phân số nửa tuyến tính.* Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp bao hàm thức vi phân bậc phân số, có xung, với trễ hữu hạn và điều kiện không cục bộ. Với lớp bài toán này, chúng tôi chứng minh được tính giải được trên nửa trục, đưa ra khái niệm ổn định tiệm cận yếu và chứng minh tính ổn định tiệm cận yếu cho nghiệm dừng của bài toán. Đặc biệt, trong trường hợp hàm phi tuyến là đơn trị, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm phân rã.

5. Ý nghĩa của các kết quả của luận án

Các kết quả thu được trong luận án góp phần làm phong phú thêm hướng nghiên cứu ổn định nghiệm cho các hệ vi phân đa trị trong không gian Banach tổng quát, có thể áp dụng cho nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cũng như các hệ vi phân thường có trễ.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trong 02 bài báo trên các tạp chí khoa học chuyên ngành (liệt kê ở mục "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án"), 02 bài đã hoàn thành ở dạng tiền ấn phẩm. Các nội dung chính trong luận án đã được báo cáo tại:

1) Đại hội Toán học toàn quốc, Nha Trang, 2013;

2) Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

3) Xêmina Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

4) Xêmina Lí luyết định tính phương trình vi phân, Bộ môn Toán cơ bản, Viện Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội.

5) Xêmina của phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. CÁC KHÔNG GIAN HÀM

Trong luận án này chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau (xem [6]). Giả sử Ω là một tập con đo được, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.

- $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, là không gian bao gồm tất cả các hàm khả tích Lebesgue bậc p trên Ω. Chuẩn trên $L^p(\Omega)$ được định nghĩa như sau:
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |u|^p dx\Big)^{1/p}.$$
Chú ý rằng $L^p(\Omega)$ là không gian Banach phản xạ khi $1 < p < +\infty$.

- $L^\infty(\Omega)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm đo được và bị chặn hầu khắp trên Ω với chuẩn
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

- $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, là không gian các hàm khả tích Lebesgue địa phương bậc p trên Ω
$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^p(K) \text{ với mọi tập compact } K \subset \Omega\}.$$

Giả sử $(\mathcal{E}; \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ là một không gian Banach. Trong luận án này chúng tôi sử dụng các không gian hàm phụ thuộc thời gian sau:

- $C([a,b];\mathcal{E})$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u : [a,b] \to \mathcal{E}$ liên tục từ $[a,b]$ vào $\mathcal{E}$ với chuẩn
$$\|u\|_{C([a,b];\mathcal{E})} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{\mathcal{E}}.$$

- $L^p(a,b;\mathcal{E})$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u:(a,b)\to\mathcal{E}$ sao cho

$$\|u\|_{L^p(a,b;\mathcal{E})} := \Big(\int_a^b \|u(t)\|_{\mathcal{E}}^p dt\Big)^{1/p} < +\infty.$$

1.2. LÍ THUYẾT NỬA NHÓM

1.2.1. Nửa nhóm liên tục mạnh và các trường hợp đặc biệt

Trong mục này, ta đưa ra các khái niệm cơ bản về lí thuyết nửa nhóm; toán tử sinh và một số trường hợp đặc biệt thường gặp. Các kiến thức trong mục này có thể xem trong tài liệu chuyên khảo [63, 34].

Giả sử $\mathcal{E}$ là một không gian Banach và $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ là không gian các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{E}$, ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1. Một họ các ánh xạ $S(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $0\le t<\infty$, được gọi là nửa nhóm trên $\mathcal{E}$ nếu nó thỏa mãn:

(i) $S(0)=I$, I là phép đồng nhất trên $\mathcal{E}$,

(ii) $S(t+s)=S(t)S(s)$ với mọi $t,s\ge 0$.

Định nghĩa 1.2. Một toán tử tuyến tính A được gọi là toán tử sinh của nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ nếu nó được xác định bởi:

$$Ax=\lim_{t\to 0}\frac{S(t)x-x}{t},$$

với mọi $x\in D(A)$, trong đó $D(A)$ là miền xác định của A:

$$D(A)=\{x\in\mathcal{E}:\lim_{t\to 0}\frac{S(t)x-x}{t}\text{ tồn tại }\}.$$

Định nghĩa 1.3. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ được gọi là nửa nhóm liên tục mạnh (C_0-nửa nhóm) nếu

$$\lim_{t\to 0}S(t)x=x,$$

với mọi $x\in\mathcal{E}$.

Định lí sau đây cho ta một điều kiện cần để toán tử tuyến tính A sinh ra một C_0-nửa nhóm:

Định lí 1.1. *Toán tử sinh của một C_0-nửa nhóm phải là một toán tử tuyến tính đóng và xác định trù mật.*

Ví dụ. Xét $\mathcal{E} = C_b(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : \|f\| = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}^+} |f(s)| < \infty\}$ là không gian các hàm liên tục bị chặn trên $\mathbb{R}^+$. Họ toán tử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được xác định như sau:

$$S(t) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

$$(S(t)f)(s) = f(t+s),\ s \in \mathbb{R}^+.$$

Khi đó $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0-nửa nhóm và toán tử sinh của nó là toán tử đạo hàm

$$Af(s) = f'(s),$$

với miền xác định $D(A) = \{f \in \mathcal{E} : f$ khả vi và $f' \in \mathcal{E}\}$.

Định lí 1.2. *Giả sử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0-nửa nhóm. Khi đó tồn tại các hằng số $\omega \geq 0$ và $M \geq 1$ sao cho*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \textit{với mọi } t \geq 0.$$

Khi đó

- Nếu $\omega < 0$ thì nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là ổn định mũ.
- Nếu $\omega \leq 0, M = 1$ thì nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là nửa nhóm co.

Định lí sau đây cho ta điều kiện cần và đủ để một toán tử tuyến tính sinh ra C_0-nửa nhóm.

Định lí 1.3. *Một toán tử tuyến tính A trên không gian Banach $\mathcal{E}$ là toán tử sinh của một C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ thỏa mãn $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ với các hằng số $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ và với mọi $t \geq 0$ nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

1) A là toán tử tuyến tính đóng với miền xác định $D(A)$ trù mật trong $\mathcal{E}$;

2) Tập giải $\rho(A)$ chứa tập $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > \omega\}$ và toán tử giải $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \text{ với } \lambda > a \text{ và } n = 1, 2, ...$$

Định nghĩa 1.4. Cho $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0-nửa nhóm trên $\mathcal{E}$. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là:

(a) nửa nhóm liên tục theo chuẩn nếu ánh xạ $t \mapsto S(t)$ liên tục tại mọi $t > 0$ theo chuẩn trong $\mathcal{L}(\mathcal{E})$;

(b) nửa nhóm khả vi nếu với mỗi $x \in \mathcal{E}$ thì ánh xạ $t \mapsto S(t)x$ khả vi tại mọi $t > 0$;

(c) nửa nhóm compact nếu $S(t)$ là toán tử compact với mọi $t > 0$.

Ta biết rằng nếu nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là khả vi hoặc compact thì nó liên tục theo chuẩn (xem [34]).

Định nghĩa 1.5. Xét $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$, với $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$.
Họ $\{S(z)\}_{z\in\Delta_\delta\cup\{0\}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{E})$ được gọi là nửa nhóm giải tích nếu

(i) $S(0) = I$;

(ii) $S(z + z') = S(z)S(z')$, với mọi $z, z' \in \Delta_\delta$;

(iii) $z \mapsto S(z)x$ liên tục tại mọi $z \in \Delta_\delta$, với $x \in \mathcal{E}$;

(iv) $z \mapsto S(z)$ là hàm giải tích trong Δ_δ.

Cuối cùng, ta đưa ra khái niệm nửa nhóm hyperbolic.

Định nghĩa 1.6. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trên $\mathcal{E}$ được gọi là nửa nhóm hyperbolic nếu $\mathcal{E}$ có thể viết được dưới dạng tổng trực tiếp $\mathcal{E} = \mathcal{E}_s \oplus \mathcal{E}_u$ của hai không gian con đóng và $\{S(t)\}_{t\geq 0}$−bất biến, sao cho hạn chế $\{S_s(t)\}_{t\geq 0}$ trên $\mathcal{E}_s$ và $\{S_u(t)\}_{t\geq 0}$ trên $\mathcal{E}_u$ của $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ thỏa mãn

(i) Nửa nhóm $\{S_s(t)\}_{t\geq 0}$ là ổn định mũ trên $\mathcal{E}_s$;

(ii) Toán tử $S_u(t)$ là khả nghịch trên $\mathcal{E}_u$ và $\{S_u(t)^{-1}\}_{t\geq 0}$ là ổn định mũ đều trên $\mathcal{E}_u$.

Ta đã biết rằng (xem [34]), một nửa nhóm liên tục mạnh $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là hyperbolic nếu tồn tại phép chiếu $P \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ giao hoán với $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sao cho $\mathcal{E}_s = \mathrm{Rg}P, \mathcal{E}_u = \mathrm{Ker}P$. Hơn nữa, tồn tại các hằng số $N, \delta > 0$ sao cho

$$\|S_s(t)Px\| \leq Ne^{-\delta t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in \mathcal{E}, \tag{1.1}$$

$$\|S_u(t)Qx\| \leq Ne^{\delta t}\|x\|, \forall t \leq 0, x \in \mathcal{E}, \tag{1.2}$$

ở đây $Q = I - P$. Đặc biệt, trong trường hợp $P = I$ thì nửa nhóm hyperbolic chính là nửa nhóm ổn định mũ.
Chúng ta có một điều kiện cần và đủ để $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một nửa nhóm hyperbolic đó là $\sigma(S(t)) \cap \Gamma = \emptyset$ với mọi $t > 0$, trong đó $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (xem [34]). Chi tiết hơn về đặc trưng phổ của tính hyperbolic, có thể xem trong [34].

1.2.2. Nửa nhóm tích phân

Trong mục trước, ta đã đề cập đến lí thuyết C_0-nửa nhóm, một công cụ mạnh để nghiên cứu các phương trình tiến hóa. Tuy nhiên, trong nhiều tình huống, lí thuyết C_0-nửa nhóm không khả dụng. Ví dụ, toán tử Schrödinger $A = i\Delta$ sinh ra một C_0-nửa nhóm trên $L^2(\mathbb{R}^n)$ với miền xác định $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$, tuy nhiên, trên các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$ với $p \neq 2$, Hörmander [39] đã chứng minh rằng A không sinh ra C_0-nửa nhóm.

Ngoài ra, trong các bài toán xác định bởi hệ vi phân không thuần nhất, hàm ngoại lực có thể nhận giá trị nằm ngoài $\overline{D(A)}$. Ví dụ, ta xét bài toán Cauchy

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \qquad t \geq 0,$$
$$u(0) = x,$$

ở đó, hàm f nhận giá trị trong không gian Banach X chứa $D(A)$ nhưng không trùng với $\overline{D(A)}$. Khi đó, A không xác định trù mật trong X nên nó không sinh ra C_0- nửa nhóm trên X. Lúc này, ta cần một khái niệm mới cho phép biểu diễn nghiệm của bài toán này.

Ta sẽ trình bày ở mục này khái niệm nửa nhóm tích phân và các tính chất của nó. Để tìm hiểu chi tiết hơn về nửa nhóm tích phân, có thể tham khảo các tài liệu [7, 43, 55, 70, 71].

Định nghĩa 1.7. Một nửa nhóm tích phân là một họ $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ các toán tử tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{E}$ thỏa mãn các tính chất:

(i) $S(0) = 0$;

(ii) $t \mapsto S(t)v$ liên tục với mỗi $v \in \mathcal{E}$;

(iii) $S(s)S(t)v = \int_0^s (S(t+r) - S(r))vdr$, với mọi $t, s \geq 0$, $v \in \mathcal{E}$.

Nửa nhóm tích phân được gọi là không suy biến nếu từ $S(t)v = 0$ với mọi $t \geq 0$ kéo theo $v = 0$.

Nhận xét 1.1. *Nếu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0-nửa nhóm trên không gian Banach $\mathcal{E}$ thì $\{S(t) := \int_0^t T(s)ds\}_{t\geq 0}$ là một nửa nhóm tích phân trên $\mathcal{E}$.*

Định nghĩa 1.8. Toán tử A được gọi là toán tử sinh của nửa nhóm tích phân $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trên $\mathcal{E}$ nếu tồn tại $\omega \in \mathbb{R}$ sao cho $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ và

$$R(\lambda, A)v = (\lambda I - A)^{-1}v = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)vdt$$

với mọi $\lambda > \omega$ và mọi $v \in \mathcal{E}$.

Mối liên hệ giữa nửa nhóm tích phân và toán tử sinh của nó được thể hiện trong mệnh đề sau (xem [7, 8]).

Mệnh đề 1.1. *Cho A là toán tử sinh của nửa nhóm tích phân $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Khi đó*

1) với mọi $x \in \mathcal{E}$ và $t \geq 0$:

$$\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A) \text{ và } S(t)x = A\Big(\int_0^t S(\tau)xd\tau\Big) + tx;$$

2) với mọi $x \in D(A)$; $t \geq 0$:

$$S(t)x \in D(A), \qquad AS(t)x = S(t)Ax,$$

và

$$S(t)x = \int_0^t S(\tau)Axd\tau + tx;$$

3) $R(\lambda, A)S(t) = S(t)R(\lambda, A)$, với mọi $t \geq 0, \lambda > \omega$.

Định nghĩa 1.9. ([43]) Nửa nhóm tích phân $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là liên tục Lipschitz địa phương, nếu với mọi $\tau > 0$, tồn tại hằng số $L(\tau) > 0$ sao cho

$$\|S(t) - S(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \leq L|t - s|, \text{ với mọi } t, s \in [0, \tau].$$

Ta đã biết rằng (xem [43]), một nửa nhóm tích phân liên tục Lipschitz địa phương là bị chặn mũ.

Bổ đề 1.1. *([43]) Các mệnh đề sau tương đương:*

(i) A là toán tử sinh của một nửa nhóm tích phân không suy biến, liên tục Lipschitz địa phương;

(ii) A thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida, tức là, tồn tại $M \geq 0$ và $\omega \in \mathbb{R}$ sao cho $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ và

$$\sup\{(\lambda - \omega)^n \|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : n \in \mathbb{N}, \lambda > \omega\} \leq M.$$

Ta đã biết rằng (xem trong [43]) nếu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một nửa nhóm tích phân sinh bởi một toán tử Hille-Yosida A, thì với mỗi v cố định, toán tử $S_v : \mathbb{R}^+ \to X$ với $S_v(t) = S(t)v$ là khả vi, và đạo hàm của nó là toán tử $S'_v : \mathbb{R}^+ \to \overline{D(A)}$

với $S'_v(t) = S'(t)v$. Hơn nữa, họ các toán tử $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ là một C_0-nửa nhóm trên $\overline{D(A)}$ sinh bởi thành phần A_0 của A, được định nghĩa bởi

$$D(A_0) = \{v \in D(A) : Av \in \overline{D(A)}\},$$

$$A_0 v = Av, \quad \text{với } v \in D(A_0).$$

Ví dụ. Xét toán tử $A = -\dfrac{d}{dx}$ trên không gian $X = C([0,1])$ (không gian các hàm liên tục trên $[0,1]$) với $D(A) = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Rõ ràng $\overline{D(A)}$ là không gian con thực sự của X tức là A không xác định trù mật. Với $\lambda > 0$ và $\nu \in X$ ta có

$$R(\lambda, A)\nu(x) = \int_0^x e^{-\lambda y}\nu(x-y)dy, x \in [0,1].$$

Do đó

$$|R(\lambda, A)\nu(x)| \leq \|\nu\|_X \int_0^x e^{-\lambda y}dy \leq \int_0^\infty e^{-\lambda y}dy = \frac{1}{\lambda}\|\nu\|_X.$$

Từ đó

$$\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Bất đẳng thức cuối suy ra A thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida và do đó nó sinh ra một nửa nhóm tích phân trên X. Ở đây, A sinh ra một C_0-nửa nhóm trên $C_0[0,1] = \overline{D(A)}$.

Mệnh đề 1.2. *([43, 71]) Cho $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một nửa nhóm tích phân liên tục Lipschitz địa phương trên $\mathcal{E}$ và $f : [0,T] \to \mathcal{E}$ là một hàm khả tích Bochner. Khi đó hàm $V : [0,T] \to \mathcal{E}$, với*

$$V(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

là khả vi liên tục và

$$\|V'(t)\| \leq 2L_T \int_0^t \|f(s)\|ds$$

với mọi $t \in [0,T]$, trong đó L_T là hằng số Lipschitz của S trên $[0,T]$.

Ngoài ra, ta cũng có (xem [71])

$$R(\lambda, A)V'(t) = \int_0^t S'(t-s)R(\lambda, A)f(s)ds.$$

do đó

$$V'(t) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t S'(t-s)\lambda R(\lambda, A)f(s)ds,$$

do $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)v = v$ với mọi $v \in D(A)$.

Sử dụng lí thuyết nửa nhóm tích phân, Thieme [70] đã nghiên cứu bài toán Cauchy

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in J = [0, T], \tag{1.3}$$

$$u(0) = u_0, \tag{1.4}$$

trong đó $f \in L^1(J, X)$ và $u_0 \in \overline{D(A)}$ cho trước, từ đó đưa ra khái niệm nghiệm tích phân và định lí tồn tại duy nhất nghiệm tích phân của bài toán.

Định nghĩa 1.10. Hàm $u : J \to \overline{D(A)}$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (1.3)-(1.4) nếu $u \in C(J; X), u(0) = u_0$ và

$$u(t) = S'(t)u(0) + \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda - A)^{-1}f(s)ds, t \in J.$$

Định lí 1.4. *Nếu A là toán tử sinh của một nửa nhóm tích phân thì tồn tại duy nhất một nghiệm tích phân $u = u(\cdot, u_0, f)$ của bài toán* (1.3)-(1.4) *với mỗi $f \in L^1(J; X), u_0 \in \overline{D(A)}$.*

1.3. ĐỘ ĐO KHÔNG COMPACT (MNC) VÀ CÁC ƯỚC LƯỢNG ĐỘ ĐO

Trong mục này, chúng tôi đưa ra các khái niệm và một số đánh giá, ước lượng cơ bản thường dùng cho độ đo không compact. Chi tiết hơn, có thể xem trong [3, 42].

Xét $(\mathcal{E}; \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ là một không gian Banach. Ký hiệu

- $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{A \subset \mathcal{E} : A \neq \emptyset\}$,

- $\mathcal{B}(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : A$ bị chặn$\}$,
- $\mathcal{K}(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : A$ compact $\}$,
- $\mathcal{K}v(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) : A$ lồi$\}$.

Định nghĩa 1.11. Hàm $\beta : \mathcal{B}(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}^+$ được gọi là *độ đo không compact* (MNC) trong $\mathcal{E}$ nếu

$$\beta(\overline{co}\,\Omega) = \beta(\Omega) \text{ với mọi } \Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{E}),$$

trong đó $\overline{co}\,\Omega$ là bao lồi đóng của Ω. Độ đo β được gọi là:

i) đơn điệu nếu $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{E}),\ \Omega_0 \subset \Omega_1$ kéo theo $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;

ii) không suy biến nếu $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ với mỗi $a \in \mathcal{E}, \Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$;

iii) bất biến với nhiễu compact nếu $\beta(K \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ với mọi tập compact tương đối $K \subset \mathcal{E}$ và $\Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$;

iv) nửa cộng tính đại số nếu $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ với mỗi $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$;

v) chính quy nếu $\beta(\Omega) = 0$ tương đương với tính compact tương đối của Ω.

Một ví dụ quan trọng của độ đo không compact là *độ đo Hausdorff* $\chi(\cdot)$, được định nghĩa như sau

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ \Omega \text{ có } \varepsilon\text{-lưới hữu hạn}\}.$$

Ngoài các tính chất đã nêu trong định nghĩa trên, độ đo Hausdorff có thêm các tính chất sau:

- tính nửa thuần nhất: $\chi(t\Omega) \leq |t|\chi(\Omega)$ với mỗi $\Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ và $t \in \mathbb{R}$;
- tính Lipschitz: $|\chi(\Omega_0) - \chi(\Omega_1)| \leq d_H(\Omega_0, \Omega_1)$, với mọi $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ và d_H là khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp;

- nếu $\mathcal{E}$ là một không gian Banach tách được thì $\chi(\Omega) = \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\Omega} d(x, \mathcal{E}_m)$, trong đó $\{\mathcal{E}_m\}$ là một dãy các không gian con hữu hạn chiều của $\mathcal{E}$ mà $\mathcal{E}_m \subset \mathcal{E}_{m+1}, m = 1, 2, ...$ và $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m} = \mathcal{E}$.

Dựa vào độ đo Hausdorff χ, ta đưa ra khái niệm *độ đo rời rạc* χ_0 như sau:

$$\chi_0(\Omega) = \sup\{\chi(D) : D \in \Delta(\Omega)\},$$

trong đó $\Delta(\Omega)$ là họ tất cả các tập con không quá đếm được của Ω (xem [3]). Ta có

$$\frac{1}{2}\chi(\Omega) \leq \chi_0(\Omega) \leq \chi(\Omega),$$

với mọi tập bị chặn $\Omega \subset E$. Khi đó, ta có tính chất tính chất sau:

Mệnh đề 1.3. *Xét χ là độ đo Hausdorff trong $\mathcal{E}$ và $\Omega \subset \mathcal{E}$ là một tập bị chặn. Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset \Omega$ sao cho*

$$\chi(\Omega) \leq 2\chi(\{x_n\}) + \epsilon.$$

Định nghĩa 1.12. Nếu $J = (a, b)$ và $\Omega \subset L^1(J; \mathcal{E})$ thỏa mãn điều kiện: với mọi $f \in \Omega, \|f(t)\| \leq \nu(t)$ hầu khắp $t \in J$, với $\nu \in L^1(J) := L^1(J; \mathbb{R})$, thì ta nói rằng Ω là một tập bị chặn tích phân.

Mệnh đề 1.4. *[42] Nếu $\{w_n\} \subset L^1(J; \mathcal{E})$ là bị chặn tích phân, thì*

$$\chi\Big(\Big\{\int_0^t w_n(s)ds\Big\}\Big) \leq 2\int_0^t \chi(\{w_n(s)\})ds,$$

với $t \in J$.

Áp dụng Mệnh đề 1.3 và Mệnh đề 1.4, ta có mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.5. *Giả sử $D \subset L^1(J; \mathcal{E})$ thỏa mãn*

1) D bị chặn tích phân;

2) $\chi(D(t)) \le q(t)$ *với hầu khắp* $t \in J$,

trong đó $q \in L^1(J)$. *Khi đó*

$$\chi\Big(\int_0^t D(s)ds\Big) \le 4\int_0^t q(s)ds,$$

ở đây $\int_0^t D(s)ds = \{\int_0^t \xi(s)ds : \xi \in D\}$.

Chứng minh. Với $\epsilon > 0$, tồn tại một dãy $\{\xi_n\} \subset D$ sao cho

$$\chi\Big(\int_0^t D(s)ds\Big) \le 2\chi\Big(\Big\{\int_0^t \xi_n(s)ds\Big\}\Big) + \epsilon,$$

do Mệnh đề 1.3. Áp dụng Mệnh đề 1.4, ta có

$$\begin{aligned}\chi\Big(\int_0^t D(s)ds\Big) &\le 4\int_0^t \chi(\{\xi_n(s)\})ds + \epsilon \\ &\le 4\int_0^t q(s)ds + \epsilon.\end{aligned}$$

Do ϵ là bất kì, ta có điều phải chứng minh. □

Các ước lượng sau đây sẽ được dùng trong Chương 3.

Mệnh đề 1.6. *1) Nếu* $\{w_n\} \subset L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ *bị chặn tích phân thì ta có*

$$\chi\Big(\Big\{\int_{-\infty}^t w_n(s)ds\Big\}\Big) \le 2\int_{-\infty}^t \chi(\{w_n(s)\})ds, \quad \text{với } t \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

và

$$\chi\Big(\Big\{\int_t^{+\infty} w_n(s)ds\Big\}\Big) \le 2\int_t^{+\infty} \chi(\{w_n(s)\})ds, \quad \text{với } t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

2) Giả sử $D \subset L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ *thỏa mãn*

(a) D *bị chặn tích phân,*

(b) $\chi(D(t)) \le q(t)$ *hầu khắp* $t \in \mathbb{R}$,

trong đó $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$. *Khi đó*

$$\chi\Big(\int_{-\infty}^{t} D(s)ds\Big) \le 4\int_{-\infty}^{t} q(s)ds, \tag{1.7}$$

và

$$\chi\Big(\int_{t}^{+\infty} D(s)ds\Big) \le 4\int_{t}^{+\infty} q(s)ds, \tag{1.8}$$

ở đây $\int_{-\infty}^{t} D(s)ds = \{\int_{-\infty}^{t} \xi(s)ds : \xi \in D\}$.

Chứng minh. 1. Từ Mệnh đề 1.4, ta có

$$\chi\Big(\Big\{\int_{h}^{t} w_n(s)ds\Big\}\Big) \le 2\int_{h}^{t} \chi(\{w_n(s)\})ds, \quad \text{với mọi } h \in \mathbb{R}.$$

Vậy,

$$\lim_{h\to-\infty} \chi\Big(\Big\{\int_{h}^{t} w_n(s)ds\Big\}\Big) \le 2\lim_{h\to-\infty}\int_{h}^{t} \chi(\{w_n(s)\})ds, \quad \text{với mọi } h \in \mathbb{R}.$$

Do tính chất Lipschitz của độ đo Hausdorff, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big|\chi\Big(\Big\{\int_{h_1}^{t} w_n(s)ds\Big\}\Big) - \chi\Big(\Big\{\int_{h_2}^{t} w_n(s)ds\Big\}\Big)\Big| \\
&\le d_H\Big(\int_{h_1}^{t}\{w_n(s)\}ds, \int_{h_2}^{t}\{w_n(s)\}ds\Big) \\
&\le \max\Big\{\sup_n d\Big(\int_{h_1}^{t} w_n(s)ds; \int_{h_2}^{t}\{w_n(s)\}ds\Big); \\
&\qquad\qquad \sup_n d\Big(\int_{h_2}^{t} w_n(s)ds; \int_{h_1}^{t}\{w_n(s)\}ds\Big)\Big\} \\
&\le \sup_n \Big\|\int_{h_1}^{t} w_n(s)ds - \int_{h_2}^{t} w_n(s)ds\Big\| \\
&\le \sup_n \Big\|\int_{h_1}^{h_2} w_n(s)ds\Big\| \\
&\le \int_{h_1}^{h_2} \nu(s)ds, \text{ với } \nu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Do $\nu \in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$, ta thu được $|\chi(\{\int_{h_1}^{t} w_n(s)ds\}) - \chi(\{\int_{h_2}^{t} w_n(s)ds\})| \to 0$ khi $|h_1 - h_2| \to 0$. Tức là $\lim\limits_{h\to-\infty} \chi(\{\int_{h}^{t} w_n(s)ds\}) = \chi(\{\int_{-\infty}^{t} w_n(s)ds\})$.

Mặt khác, $\lim\limits_{h\to-\infty}\int_h^t \chi(\{w_n(s)\})ds = \int_{-\infty}^t \chi(\{w_n(s)\})ds$. Từ đó ta có (1.5). Lí luận tương tự, ta thu được (1.6).

2. Áp dụng Mệnh đề 1.3, ta có, với $\epsilon > 0$, tồn tại dãy $\xi_n \in D$ thỏa mãn

$$\chi\Big(\int_{-\infty}^t D(s)ds\Big) \le 2\chi\Big(\Big\{\int_{-\infty}^t \xi_n(s)ds\Big\}\Big) + \epsilon,$$

Áp dụng (1.5) cho đánh giá này, ta thu được

$$\begin{aligned}\chi\Big(\int_{-\infty}^t D(s)ds\Big) &\le 4\int_{-\infty}^t \chi(\{\xi_n(s)\})ds + \epsilon\\ &\le 4\int_{-\infty}^t q(s)ds + \epsilon.\end{aligned}$$

Do ϵ là bất kỳ, ta có (1.7). Lí luận tương tự, ta thu được (1.8). □

Để kết thúc mục này, ta định nghĩa χ-chuẩn của một ánh xạ tuyến tính bị chặn $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$) (xem [3]):

$$\|\mathcal{T}\|_\chi = \inf\{\beta > 0 : \chi(\mathcal{T}(B)) \le \beta\chi(B) \text{ với mọi tập bị chặn } B \subset \mathcal{E}\}. \quad (1.9)$$

Ta biết rằng χ-chuẩn của $\mathcal{T}$ được tính bởi công thức

$$\|\mathcal{T}\|_\chi = \chi(\mathcal{T}(\mathbf{B_1})) = \chi(\mathcal{T}(\mathbf{S_1})),$$

trong đó $\mathbf{B_1}$ và $\mathbf{S_1}$ tương ứng là hình cầu đơn vị và mặt cầu đơn vị trong $\mathcal{E}$. Ta cũng có kết quả

$$\|\mathcal{T}\|_\chi \le \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})},$$

với $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ là chuẩn toán tử trong $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Rõ ràng, $\mathcal{T}$ là toán tử compact nếu và chỉ nếu $\|\mathcal{T}\|_\chi = 0$.

1.4. ÁNH XẠ NÉN VÀ CÁC ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Lí thuyết điểm bất động cho ánh xạ nén là công cụ cơ bản để chứng minh sự tồn tại nghiệm cho các bài toán đề cập trong luận án này. Chi tiết hơn về ánh

xạ nén và các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén, có thể xem trong [42, 3]. Trước tiên, ta nhắc lại một số khái niệm của giải tích đa trị.

Định nghĩa 1.13. Cho Y là một không gian metric, ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : Y \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$ được gọi là:

(i) nửa liên tục trên nếu $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{y \in Y : \mathcal{F}(y) \cap V \neq \varnothing\}$ là một tập đóng trong Y với mỗi tập đóng $V \subset \mathcal{E}$;

(ii) nửa liên tục trên yếu nếu $\mathcal{F}^{-1}(V)$ là tập đóng trong Y với mọi tập đóng yếu $V \subset \mathcal{E}$;

(iii) đóng nếu đồ thị $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(y, z) : z \in \mathcal{F}(y)\}$ là một tập đóng trong $Y \times \mathcal{E}$;

(iv) compact nếu ảnh $\mathcal{F}(Y)$ là tiền compact trong $\mathcal{E}$;

(v) tựa compact nếu hạn chế của nó trên mỗi tập compact $A \subset Y$ là compact.

Bổ đề 1.2. *[42, Định lí 1.1.12] Giả sử $G : Y \to K(\mathcal{E})$ là một ánh xạ đa trị đóng, tựa compact. Khi đó, G là nửa liên tục trên.*

Bổ đề 1.3. *[17, Mệnh đề 2] Cho $\mathcal{E}$ là một không gian Banach và Ω là một tập con khác rỗng của một không gian Banach khác. Giả sử rằng $G : \Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$ là một ánh xạ đa trị nhận giá trị lồi compact yếu. Khi đó, G là nửa liên tục trên yếu nếu và chỉ nếu $\{x_n\} \subset \Omega$, $x_n \to x_0 \in \Omega$ và $y_n \in G(x_n)$ kéo theo $y_n \rightharpoonup y_0 \in G(x_0)$.*

Định lí điểm bất động sau đây là một trường hợp đặc biệt của kết quả trong [37].

Bổ đề 1.4. *Giả sử E là một không gian Banach và $D \subset E$ là một tập con khác rỗng, compact và lồi. Nếu toán tử đa trị $\mathcal{F} : D \to \mathcal{P}(D)$ là đóng với giá trị lồi và đóng, thì $\mathcal{F}$ có điểm bất động.*

Định nghĩa 1.14. Ánh xạ liên tục $\mathcal{F} : Z \subseteq \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ được gọi là một ánh xạ nén theo độ đo β (β-nén) nếu với tập bị chặn $\Omega \subset Z$, mà

$$\beta(\Omega) \leq \beta(\mathcal{F}(\Omega))$$

sẽ kéo theo tính compact tương đối của Ω.

Với β là một độ đo đơn điệu, không suy biến trong $\mathcal{E}$, ứng dụng của lí thuyết bậc tôpô cho ánh xạ nén (xem [3, 42]), ta có định lí điểm bất động sau.

Định lí 1.5. *[42, Hệ quả 3.3.1] Giả sử $\mathcal{M}$ là một tập con lồi, đóng, bị chặn của $\mathcal{E}$ và $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$ là một ánh xạ đóng và β-nén. Khi đó $Fix(\mathcal{F}) := \{x \in \mathcal{F}(x)\}$ là một tập compact khác rỗng.*

1.5. TẬP HÚT TOÀN CỤC CHO NỬA DÒNG ĐA TRỊ

Trong mục này, ta nhắc lại các khái niệm về nửa dòng đa trị và tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị theo lược đồ của Melnik và Valero (xem [52]). Giả sử Γ là một nửa nhóm con không tầm thường của nửa nhóm cộng tính các số thực $\mathbb{R}$ và $\Gamma_+ = \Gamma \cap [0, \infty)$.

Định nghĩa 1.15. Ánh xạ $G : \Gamma_+ \times \mathcal{E} \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$ được gọi là một nửa dòng đa trị nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

1) $G(0, w) = \{w\}$, với mọi $w \in \mathcal{E}$.

2) $G(t_1 + t_2, x) \subset G(t_1, G(t_2, x))$, với mọi $t_1, t_2 \in \Gamma_+$, $x \in \mathcal{E}$,

trong đó $G(t, B) = \cup_{x \in B} G(t, x)$, $B \subset \mathcal{E}$.
Nửa dòng đa trị được gọi là ngặt nếu $G(t_1 + t_2, w) = G(t_1, G(t_2, w))$ với mọi $w \in \mathcal{E}$ và $t_1, t_2 \in \Gamma_+$. G được gọi là bị chặn chung cuộc nếu với mỗi tập bị chặn $B \subset \mathcal{E}$, tồn tại số $T(B) > 0$ sao cho $\gamma^+_{T(B)}(B)$ là bị chặn. Ở đây, $\gamma^+_{T(B)}(B)$ là tập các quỹ đạo sau thời điểm $T(B) : \gamma^+_{T(B)}(B) = \bigcup\limits_{t \geq T(B)} G(t, B)$.

Định nghĩa 1.16. Một tập bị chặn $B_1 \subset \mathcal{E}$ được gọi là một tập hấp thụ của nửa dòng đa trị G nếu với mỗi tập bị chặn $B \subset \mathcal{E}$, tồn tại $\tau = \tau(B) \geq 0$ sao cho $\gamma^+_{\tau(B)}(B) \subset B_1$.

Định nghĩa 1.17. Tập con $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ được gọi là tập hút toàn cục của nửa dòng đa trị G nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1) $\mathcal{A}$ hút mọi tập $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, nghĩa là $\text{dist}(G(t, B), A) \to 0$ khi $t \to \infty$, với mọi tập bị chặn $B \subset \mathcal{E}$, trong đó $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ kí hiệu nửa khoảng cách Hausdorff của hai tập con trong $\mathcal{E}$;

2) $\mathcal{A}$ là nửa bất biến âm, tức là $\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A}), \forall t \in \Gamma_+$.

Định lí sau đây cho chúng ta một điều kiện đủ để tồn tại tập hút toàn cục của một nửa dòng đa trị G.

Định lí 1.6. *[52] Giả sử nửa dòng G thỏa mãn các tính chất:*

1) $G(t, \cdot)$ là nửa liên tục trên và có giá trị đóng với mỗi $t \in \Gamma_+$;

2) G tán xạ điểm, tức là tồn tại $K > 0$ sao cho với $w \in \mathcal{E}, u(t) \in G(t, w)$, thì $\|u(t)\|_{\mathcal{E}} \leq K$ với $t \geq t_0(\|w\|_{\mathcal{E}})$;

3) G là tiệm cận trên nửa compact, tức là nếu B là một tập đóng trong $\mathcal{E}$ sao cho với $T(B) > 0, \gamma^+_{T(B)}(B)$ bị chặn, thì mỗi dãy $\xi_n \in G(t_n, B)$ với $t_n \to \infty$ là tiền compact trong $\mathcal{E}$.

Nếu G là bị chặn chung cuộc, thì nó chứa một tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$ trong $\mathcal{E}$. Hơn nữa, nếu G là một nửa dòng ngặt, thì $\mathcal{A}$ là bất biến, tức là $\mathcal{A} = G(t, \mathcal{A})$ với mỗi $t \in \Gamma_+$.

1.6. GIẢI TÍCH BẬC PHÂN SỐ

1.6.1. Đạo hàm và tích phân bậc phân số

Xét $L^1(0, T; \mathcal{E})$ là không gian các hàm khả tích trên khoảng $(0, T)$, theo nghĩa Bochner.

Định nghĩa 1.18. Tích phân bậc $\alpha > 0$ của hàm $f \in L^1(0,T;\mathcal{E})$ được xác định bởi

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds,$$

trong đó Γ là hàm Gamma.

Định nghĩa 1.19. Xét hàm $f \in C^N([0,T];\mathcal{E})$, đạo hàm bậc $\alpha \in (N-1,N)$ theo nghĩa Caputo được xác định bởi

$${}^C D_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} f^{(N)}(s)ds.$$

Chú ý rằng, có nhiều khái niệm đạo hàm bậc phân số khác nhau, nhưng hai định nghĩa theo kiểu Riemann-Liouville và Caputo là được sử dụng rộng rãi nhất.

Với $u \in C^N([0,T];\mathcal{E})$, ta có tính chất

$${}^C D_0^\alpha I_0^\alpha u(t) = u(t),$$

$$I_0^\alpha \, {}^C D_0^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

1.6.2. Công thức nghiệm cho bài toán với phương trình vi phân bậc phân số

Giả sử $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach. Xét bài toán Cauchy với phương trình vi phân bậc phân số có xung

$${}^C D_0^\alpha u(t) = Au(t) + f(t),\ t \neq t_k, t_k \in (0,+\infty), k \in \Lambda, \tag{1.10}$$

$$u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), \tag{1.11}$$

$$u(0) = u_0, \tag{1.12}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính đóng trong X sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $W(\cdot)$ thỏa mãn $\|W(t)x\| \leq M_A\|x\|, \forall t \geq 0, x \in X$. Ở đây, ta xét $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $f \in L^p(0,T;X)$ với $p > \frac{1}{\alpha}$, còn I_k là các hàm liên tục.

Với $\alpha \in (0,1)$, áp dụng biến đổi Laplace cho phương trình (1.10), ta thu được

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathcal{L}[(\cdot)^{-\alpha} * u'](\lambda) = A\mathcal{L}[u](\lambda) + \mathcal{L}[f](\lambda),$$

do ${}^{C}D_0^{\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\cdot)^{-\alpha} * u'$, ở đây $\mathcal{L}[\cdot]$ là biến đổi Laplace cho các hàm giá trị véc tơ, ta có

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}(\lambda\mathcal{L}[u](\lambda) - \sum_{k\in\Lambda} e^{-\lambda t_k} I_k - u(0)) = A\mathcal{L}[u](\lambda) + \mathcal{L}[f](\lambda).$$

Vậy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](\lambda) &= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}u_0 \\ &\quad + \lambda^{\alpha-1}(\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}\sum_{k\in\Lambda} e^{-\lambda t_k} I_k + (\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}\mathcal{L}[f](\lambda). \qquad (1.13)\end{aligned}$$

Đặt $S_\alpha(t)$ và $P_\alpha(t), t \in \mathbb{R}^+$, là các toán tử thỏa mãn

$$\mathcal{L}[S_\alpha](\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}, \qquad (1.14)$$

$$\mathcal{L}[(\cdot)^{\alpha-1}P_\alpha](\lambda) = (\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}. \qquad (1.15)$$

Thay vào (1.13) ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](\lambda) &= \mathcal{L}[S_\alpha](\lambda)u_0 + \sum_{k\geq 1}\mathcal{L}[S_\alpha](\lambda)(e^{-\lambda t_k}I_k) \\ &\quad + \mathcal{L}[(\cdot)^{\alpha-1}P_\alpha](\lambda)\mathcal{L}[f](\lambda). \qquad (1.16)\end{aligned}$$

Áp dụng các tính chất của phép biến đổi Laplace (về tịnh tiến và tích chập), ta thu được

$$\begin{aligned}u(t) &= S_\alpha(t)u_0 + \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k)) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f(s)ds, t > 0.\end{aligned}$$

Biểu diễn cụ thể của S_α và P_α được đưa ra trong [84]:

$$S_\alpha(t)x = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)W(t^\alpha\theta)xd\theta, \tag{1.17}$$

$$P_\alpha(t)x = \alpha\int_0^\infty \theta\phi_\alpha(\theta)W(t^\alpha\theta)xd\theta, \tag{1.18}$$

với ϕ_α là hàm mật độ xác suất trên khoảng $(0,\infty)$, tức là, $\phi_\alpha(\theta) \geq 0$ và $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta = 1$. Cụ thể, ϕ_α được xác định bởi

$$\phi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\psi_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}),$$

$$\psi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-\alpha n-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha).$$

Theo [84], ta có các ước lượng sau cho $S_\alpha(t)$ và $P_\alpha(t)$:

$$\|S_\alpha(t)x\| \leq M_A\|x\|, \tag{1.19}$$

$$\|P_\alpha(t)x\| \leq \frac{M_A}{\Gamma(\alpha)}\|x\|, \forall x \in X. \tag{1.20}$$

Chương 2

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA MỘT LỚP BAO HÀM THỨC VI PHÂN HÀM NỬA TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu hệ động lực sinh bởi một lớp bao hàm thức vi phân mà thành phần tuyến tính sinh ra một nửa nhóm tích phân. Ở đây, chúng tôi sử dụng các kĩ thuật ước lượng cho độ đo không compact để chứng minh tính giải được toàn cục và sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị sinh bởi hệ. Kết quả này của chúng tôi là sự tổng quát hóa một số kết quả gần đây đã thực hiện cho mô hình đơn trị.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số 2 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Với $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach, chúng tôi nghiên cứu lớp bao hàm thức tiến hoá sau

$$u'(t) \in Au(t) + F(u(t), u_t), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$u(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \tag{2.2}$$

ở đây u là hàm nhận giá trị trong X, u_t là hàm trễ, tức là $u_t(s) = u(t+s)$ với $s \in [-h, 0]$, F là một hàm đa trị xác định trên một tập con của $X \times C([-h, 0]; X)$. Trong chương này, chúng ta xét $A : D(A) \subset X \to X$ là một toán tử tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida với miền xác định không trù mật, sinh ra nửa nhóm tích phân $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

2.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TÍCH PHÂN

Trong mục này, ta chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán trên đoạn $[0;T]$ với $\forall T > 0$. Ký hiệu

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c(X) &= \{D \in \mathcal{P}(X) : D \text{ là tập đóng}\},\\ \mathcal{C}_h &= \{\varphi \in C([-h,0];X) : \varphi(0) \in \overline{D(A)}\},\\ \mathcal{C}_\varphi &= \{v : J \to \overline{D(A)}, v \in C(J,X), v(0) = \varphi(0)\}.\end{aligned}$$

Với $v \in \mathcal{C}_\varphi$, ta kí hiệu $v[\varphi] \in C([-h,T];X)$ là hàm xác định như sau

$$v[\varphi](t) = \begin{cases} v(t) \text{ nếu } t \in [0,T] \\ \varphi(t) \text{ nếu } t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán, ta giả thiết

(**A**) *Toán tử A thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida, sinh ra nửa nhóm tích phân $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ và đạo hàm của nó là C_0-nửa nhóm $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ trên $\overline{D(A)}$ liên tục theo chuẩn.*

Đối với thành phần phi tuyến của bài toán (2.1)-(2.2), ta giả thiết

(**F**) *Hàm đa trị $F : \overline{D(A)} \times \mathcal{C}_h \to \mathcal{P}_c(X)$ thỏa mãn:*

(1) *F là nửa liên tục trên với giá trị compact yếu, lồi;*

(2) $\|F(x,y)\| := \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(x,y)\} \leq a\|x\| + b\|y\|_{\mathcal{C}_h} + c$, *với mọi $x \in \overline{D(A)}$, $y \in \mathcal{C}_h$, ở đây a, b, c là các hằng số không âm;*

(3) *nếu $\{S'(t)\}$ không compact, thì $\chi(F(B,C)) \leq p\chi(B) + q \sup\limits_{t\in[-h,0]} \chi(C(t))$, với mọi $B \subset \overline{D(A)}, C \subset \mathcal{C}_h$, ở đây $p, q \in \mathbb{R}^+$.*

Đặt

$$\mathcal{P}_F(v) = \{f \in L^1(J;X) : f(t) \in F(v(t), v[\varphi]_t), \text{ hầu khắp } t \in J\},$$

kết quả sau được chứng minh như trong [17, Định lí 1].

Mệnh đề 2.1. *Giả sử* $(\mathbf{F})(1) - (\mathbf{F})(2)$ *thỏa mãn. Khi đó* $\mathcal{P}_F(u) \neq \emptyset$ *với mỗi* $u \in \mathcal{C}_\varphi$. *Hơn nữa,* $\mathcal{P}_F : C(J;X) \to \mathcal{P}(L^1(J;X))$ *là nửa liên tục trên yếu với giá trị compact yếu, lồi.*

Ta có định nghĩa nghiệm tích phân của bài toán (2.1)-(2.2).

Định nghĩa 2.1. Với mỗi $\varphi \in \mathcal{C}_h$ cho trước, một hàm $u : [-h, T] \to X$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (2.1)-(2.2) trên $[-h, T]$ với điều kiện ban đầu φ nếu tồn tại $f \in \mathcal{P}_F(u)$ sao cho

$$u(t) = \begin{cases} S'(t)\varphi(0) + \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s)ds, t \geq 0, \\ \varphi(t), t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Bây giờ, ta xác định toán tử đa trị $\mathcal{F} : \mathcal{C}_\varphi \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_\varphi)$ như sau

$$\mathcal{F}(v)(t) = \Big\{ S'(t)\varphi(0) + \mathcal{W}(f)(t) : f \in \mathcal{P}_F(v) \Big\},$$

trong đó

$$\mathcal{W}(f)(t) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s)ds, t \geq 0. \tag{2.3}$$

Khi đó, $v \in \mathcal{C}_\varphi$ là một điểm bất động của $\mathcal{F}$ khi và chỉ khi $v[\varphi]$ là một nghiệm tích phân của (2.1)-(2.2).

Định nghĩa 2.2. Một dãy $\{f_n\} \subset L^1(J;X)$ được gọi là nửa compact nếu nó là bị chặn tích phân và $\{f_n(t)\} \in K(t)$, hầu khắp $t \in J$, với $K(t) \subset X, t \in J$, là một họ các tập compact.

Ta đã biết rằng nếu $\{f_n\}$ là nửa compact trong $L^1(J;X)$, thì nó cũng là compact yếu (xem [42, Mệnh đề 4.2.1]). Chúng ta cần tới kết quả sau (chứng minh có trong [59, Mệnh đề 7]).

Mệnh đề 2.2. *Giả sử* $(\mathbf{A})$ *thỏa mãn. Nếu* $D \subset L^1(J;X)$ *là bị chặn tích phân, thì* $\mathcal{W}(D)$ *là liên tục đồng bậc trong* $C(J;X)$. *Nếu* $D = \{f_n\}$ *là một dãy*

nửa compact thì $\{\mathcal{W}(f_n)\}$ *là compact tương đối trong* $C(J;X)$*. Hơn nữa, nếu* $f_n \rightharpoonup f^*$ *trong* $L^1(J;X)$ *thì* $\mathcal{W}(f_n) \to \mathcal{W}(f^*)$ *trong* $C(J;X)$*.*

Sau đây là kết quả về sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán.

Định lí 2.1. *Giả sử rằng* (**A**) *và* (**F**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (2.1)-(2.2) *có ít nhất một nghiệm tích phân với mỗi* $\varphi \in \mathcal{C}_h$ *cho trước.*

Chứng minh. Đầu tiên, ta có nhận xét $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, do $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}v = v$ với mỗi $v \in \overline{D(A)}$.
Bây giờ, ta chỉ ra sự tồn tại của một tập lồi, đóng $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{C}_\varphi$ thỏa mãn $\mathcal{F}(\mathcal{M}_0) \subset \mathcal{M}_0$. Lấy $z \in \mathcal{F}(u)$. Từ định nghĩa của toán tử nghiệm, ta có

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\le \|S'(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|\varphi(0)\| + \|\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}f(s)ds\| \\
&\le M\|\varphi(0)\| + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t \|S'(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|f(s)\|ds \\
&\le M\|\varphi(0)\| + M\int_0^t (a\|u(s)\| + b\|u_s\|_{\mathcal{C}_h} + c)ds,
\end{aligned}$$

trong đó $M = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|S'(t)\|$.
Mặt khác, ta có

$$\|u_s\|_{\mathcal{C}_h} = \sup_{\theta\in[-h,0]} \|u(s+\theta)\| \le \|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + \sup_{\rho\in[0,s]} \|u(\rho)\|.$$

Từ đó thu được

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\le M\|\varphi(0)\| + M\int_0^t (a\|u(s)\| + b\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + b\sup_{\rho\in[0,s]}\|u(\rho)\| + c)ds \\
&\le M\|\varphi(0)\| + MT(b\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + c) + M\int_0^t (a\|u(s)\| + b\sup_{\rho\in[0,s]}\|u(\rho)\|)ds \\
&\le M_1 + M(a+b)\int_0^t \sup_{\rho\in[0,s]}\|u(\rho)\|)ds,
\end{aligned}$$

với $M_1 = M\|\varphi(0)\| + MT(b\|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} + c)$. Do thành phần cuối là tăng theo t, ta có

$$\sup_{\rho\in[0,t]} \|z(\rho)\| \leq M_1 + M(a+b)\int_0^t \sup_{\rho\in[0,s]} \|u(\rho)\|ds. \tag{2.4}$$

Đặt

$$\mathcal{M}_0 = \{u \in \mathcal{C}_\varphi : \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| \leq \psi(t), t \in J\},$$

với ψ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\psi(t) = M_1 + M(a+b)\int_0^t \psi(s)ds.$$

Rõ ràng, $\mathcal{M}_0$ là một tập con đóng, lồi trong $\mathcal{C}_\varphi$ và (2.4) đảm bảo rằng $\mathcal{F}(\mathcal{M}_0) \subset \mathcal{M}_0$.

Đặt

$$\mathcal{M}_{k+1} = \overline{co}\mathcal{F}(\mathcal{M}_k), k = 0, 1, 2, ...$$

ở đây $\overline{co}$ là kí hiệu bao đóng lồi của một tập con trong $\mathcal{C}_\varphi$. Ta có $\mathcal{M}_k$ là đóng, lồi và $\mathcal{M}_{k+1} \subset \mathcal{M}_k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Đặt $\mathcal{M} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k$, thì $\mathcal{M}$ là một tập con đóng lồi của $\mathcal{C}_\varphi$ và $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{M}$ là compact bằng cách sử dụng Định lí Arzelà-Ascoli. Thật vậy, với mỗi $k \geq 0, \mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)$ là bị chặn tích phân do giả thiết $(\mathbf{F})(2)$. Do đó, Mệnh đề 2.2 cho ta tính liên tục đồng bậc của $\mathcal{F}(\mathcal{M}_k)$. Từ đó kéo theo $\mathcal{M}_{k+1}$ cũng là liên tục đồng bậc với mọi $k \geq 0$. Vậy $\mathcal{M}$ là liên tục đồng bậc.

Để áp dụng được Định lí Arzelà-Ascoli, ta cần chứng minh $\mathcal{M}(t)$ là compact với mỗi $t \geq 0$. Điều này tương đương với $\mu_k(t) = \chi(\mathcal{M}_k(t)) \to 0$ khi $k \to \infty$, với χ là độ đo Hausdorff trên X.

Nếu $\{S'(t)\}$ là compact thì dễ dàng kiểm tra được

$$\begin{aligned}
\mu_{k+1}(t) = \chi(\mathcal{M}_{k+1}(t)) &\leq \lim_{\lambda\to\infty} \chi\left(\int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}\mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)(s)ds\right) \\
&\leq 4\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t \chi\left(S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}\mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)(s)\right)ds \\
&= 0,
\end{aligned}$$

do Mệnh đề 1.5. Ngược lại, nếu $\{S'(t)\}$ là không compact, ta có

$$\begin{aligned}
\mu_{k+1}(t) &\leq 4M \int_0^t \chi\left(\mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)(s)\right) ds \\
&\leq 4M \int_0^t [p\,\chi(\mathcal{M}_k(s)) + q \sup_{\tau\in[-h,0]} \chi(\mathcal{M}_k[\varphi](s+\tau))]ds \\
&\leq 4M \int_0^t [p\,\chi(\mathcal{M}_k(s)) + q \sup_{\tau\in[0,s]} \chi(\mathcal{M}_k(\tau)]ds \\
&\leq 4M(p+q) \int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]} \mu_k(\tau)ds,
\end{aligned}$$

theo (**F**)(3). Do vế phải là không giảm theo t nên

$$\sup_{\tau\in[0,t]} \mu_{k+1}(\tau) \leq 4M(p+q) \int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]} \mu_k(\tau)ds.$$

Đặt $\eta_k(t) = \sup_{\tau\in[0,t]} \mu_k(\tau)$, ta có

$$\eta_{k+1}(t) \leq 4M(p+q) \int_0^t \eta_k(s)ds.$$

Đặt $\eta_\infty(t) = \lim_{k\to\infty} \eta_k(t)$, thì

$$\eta_\infty(t) \leq 4M(p+q) \int_0^t \eta_\infty(s)ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall-Bellman, ta thu được $\eta_\infty(t) = 0$ với mọi $t \in J$. Do $0 \leq \mu_k(t) \leq \eta_k(t) \to 0$ khi $t \to \infty$, ta có $\mu_k(t) \to 0$ với $k \to \infty$.

Bây giờ, ta xét $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Để áp dụng Bổ đề 1.4, ta còn phải chứng minh $\mathcal{F}$ là đóng. Xét $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$ với $u_n \to u^*$ và $v_n \in \mathcal{F}(u_n)$ với $v_n \to v^*$. Ta có

$$v_n(t) \in S'(t)\varphi(0) + \mathcal{W} \circ \mathcal{P}_F(u_n)(t).$$

Lấy $f_n \in \mathcal{P}_F(u_n)$ sao cho

$$v_n(t) = S'(t)\varphi(0) + \mathcal{W}(f_n)(t). \tag{2.5}$$

Từ tính nửa liên tục trên yếu của $\mathcal{P}_F$ (Mệnh đề 2.1), ta xét Bổ đề 1.3 khi $f_n \rightharpoonup f^*$ trong $L^1(J;X)$ và $f^* \in \mathcal{P}_F(u^*)$. Hơn nữa, đặt $K(t) = F(\overline{\{u_n(t), u_n[\varphi]_t\}})$

thì $\{f_n(t)\} \in K(t)$ hầu khắp $t \in J$ với $K(t)$ là compact trong X do F là nửa liên tục trên. Từ $(\mathbf{F})(2)$, ta có $\{f_n\}$ bị chặn tích phân. Do đó $\{f_n\}$ là dãy nửa compact. Áp dụng Mệnh đề 2.2 ta có tính compact của $\{\mathcal{W}(f_n)\}$ trong $C(J;X)$. Vậy ta có thể chuyển qua giới hạn trong (3.7) để thu được $v^*(t) = S'(t)\varphi(0) + \mathcal{W}(f^*)(t)$ với $f^* \in \mathcal{P}_F(u^*)$. Suy ra, $v^* \in \mathcal{F}(u^*)$. Định lí được chứng minh. □

Phần còn lại của mục này, ta chứng minh một số tính chất của tập nghiệm, những tính chất này sẽ được dùng để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong mục sau.

Gọi $\pi_T, T > 0$, là toán tử chặt cụt trên đoạn $[0,T]$ tác động trên $C([0,+\infty);X)$, tức là, với $z \in C([0,+\infty);X), \pi_T(z)$ là hạn chế của z trên đoạn $[0,T]$. Kí hiệu

$$\Sigma(\varphi) = \{u \in C([0,+\infty);X) : u[\varphi] \text{ là một nghiệm tích phân của (2.1)-(2.2) trên } [-h,T] \text{ với mọi } T > 0\}.$$

Bổ đề 2.1. *Giả sử* $(\mathbf{A})$ *và* $(\mathbf{F})$ *thỏa mãn và* $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}_h$ *là một dãy con hội tụ. Khi đó* $\pi_T \circ \Sigma(\{\varphi_n\})$ *là compact tương đối trong* $C([0,T];X)$*. Đặc biệt,* $\pi_T \circ \Sigma(\varphi)$ *là compact với mỗi* $\varphi \in \mathcal{C}_h$ *.*

Chứng minh. Lấy $v_n \in \pi_T \circ \Sigma(\varphi_n), n \in \mathbb{N}$, ta có

$$v_n(t) \in S'(t)\varphi_n(0) + \mathcal{W} \circ \mathcal{P}_F(v_n)(t), t \in [0,T].$$

Ta cần chỉ ra rằng $\{v_n\}$ là liên tục đồng bậc và $\{v_n(t)\}$ là compact tương đối với mỗi $t \in [0,T]$. Đánh giá tương tự như (2.4) cho ta

$$\|v_n(t)\| \le M_1 + M(a+b)\int_0^t \sup_{\rho\in[0,s]} \|v_n(\rho)\| ds, \forall t \in [0,T], \tag{2.6}$$

trong đó $M = \sup_{t\in[0,T]} \|S'(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$, và

$$M_1 = M \sup_n \|\varphi_n(0)\| + MT(b \sup_n \|\varphi_n\|_{\mathcal{C}_h} + c).$$

Do vế phải của (2.6) là không giảm theo t, ta có

$$w_n(t) \leq M_1 + M(a+b)\int_0^t w_n(s)ds, \forall t \in [0,T],$$

với $w_n(t) = \sup_{\rho\in[0,t]} \|v_n(\rho)\|$. Áp dụng bất đẳng thức Gronwall-Bellman, ta thu được tính bị chặn của $\{w_n\}$, từ đó kéo theo tính bị chặn của $\{v_n\}$ trong $C([0,T];X)$. Lấy $f_n \in \mathcal{P}_F(v_n)$ sao cho

$$v_n(t) = S'(t)\varphi_n(0) + \mathcal{W}(f_n)(t).$$

Từ $(\mathbf{F})(2)$, ta có $\{f_n\}$ là bị chặn tích phân do tính bị chặn của $\{v_n\}$. Nếu $\{S'(t)\}$ là compact thì $\{v_n\}$ hiển nhiên là compact. Trong trường hợp $\{S'(t)\}$ là không compact, ta có $\{\mathcal{W}(f_n)\}$ là tập liên tục đồng bậc nhờ Mệnh đề 2.2. Điều này chứng tỏ $\{v_n\}$ là liên tục đồng bậc. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}
\chi(\{v_n(t)\}) &= \chi(\{S'(t)\varphi_n(0) + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}f_n(s)ds\}) \\
&\leq \lim_{\lambda\to+\infty}\chi\Big(\Big\{\int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}f_n(s)\Big\}ds\Big) \\
&\leq 2\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t \|S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\chi(\{f_n(s)\})ds \\
&\leq 2M\int_0^t [p\chi(\{v_n(s)\}) + q\sup_{\theta\in[-h,0]}\chi(\{v_n[\varphi_n](s+\theta)\})]ds \\
&\leq 2M(p+q)\int_0^t \sup_{\rho\in[0,s]}\chi(\{v_n(\rho)\})ds.
\end{aligned}$$

Lí luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1, ta thu được $\{v_n(t)\}$ là compact tương đối với mỗi $t \in [0,T]$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\pi_T \circ \Sigma(\varphi)$ là compact với mỗi $\varphi \in \mathcal{C}_h$. Tức là ta cần chỉ ra $\pi_T \circ \Sigma(\varphi)$ là đóng. Giả sử $v_n \in \pi_T \circ \Sigma(\varphi)$, $v_n \to v^*$ trong $C([0,T];X)$. Lí luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1, ta thu được $v^* \in \pi_T \circ \Sigma(\varphi)$. Tức là, $\pi_T \circ \Sigma(\varphi)$ là đóng. Như vậy, định lí được chứng minh. □

Bây giờ, ta định nghĩa nửa dòng đa trị sinh bởi (2.1)-(2.2) như sau

$$G : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_h \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_h),$$
$$G(t, \varphi) = \{u_t : u[\varphi] \text{ là một nghiệm tích phân của } (2.1) - (2.2)\}.$$

Lí luận tương tự như trong [52], ta có G là một nửa dòng đa trị ngặt, tức là

$$G(t_1 + t_2, \varphi) = G(t_1, G(t_2, \varphi)), \text{ với mọi } t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathcal{C}_h.$$

Ta sẽ chứng minh tính nửa liên tục trên của G trong bổ đề sau.

Bổ đề 2.2. *Với giả thiết* (**A**) *và* (**F**) *thì* $G(t, \cdot)$ *là nửa liên tục trên với giá trị compact với mỗi* $t > 0$.

Chứng minh. Ta có $\pi_t \circ \Sigma(\varphi)$ là compact trong $C([0, t]; X)$ với mỗi $t > 0$ như đã chứng minh trong Bổ đề 2.1. Suy ra, $G(t, \varphi)$ là compact với mỗi $\varphi \in \mathcal{C}_h$, nghĩa là $G(t, \cdot)$ nhận giá trị compact. Để áp dụng Bổ đề 1.2, ta còn phải chứng minh $G(t, \cdot)$ là tựa compact và có đồ thị đóng.

Đầu tiên ta chứng minh $G(t, \cdot)$ tựa compact. Giả sử rằng $K \subset \mathcal{C}_h$ là một tập compact. Lấy $\{z_n\} \subset G(t, K)$, thì tồn tại dãy $\{\phi_n\} \subset K$ sao cho $z_n \in G(t, \phi_n)$. Có thể giả sử $\{\phi_n\}$ hội tụ tới ϕ^* trong $\mathcal{C}_h$. Đặt $u_n \in \Sigma(\phi_n)$ sao cho

$$z_n(s) = u_n[\phi_n](t + s), s \in [-h, 0]. \tag{2.7}$$

Từ Bổ đề 2.1, ta có $\pi_t \circ \Sigma(\{\phi_n\})$ là compact tương đối trong $C([0, t]; X)$. Do đó, có một dãy con của $\{u_n\}$ (ta cũng kí hiệu là $\{u_n\}$) sao cho

$$\pi_t(u_n) \to u^* \text{ trong } C([0, t], X).$$

Vậy, từ (2.7), ta có $\{z_n\}$ hội tụ tới $u^*[\phi^*]_t$.

Bây giờ ta chứng minh $G(t, \cdot)$ có đồ thị đóng. Lấy $\{\varphi_n\}$ là một dãy trong $\mathcal{C}_h$ hội tụ tới φ^* và $\xi_n \in G(t, \varphi_n)$ sao cho $\xi_n \to \xi^*$. Ta phải chứng minh $\xi^* \in G(t, \varphi^*)$. Chọn $u_n \in \Sigma(\varphi_n)$ sao cho $\xi_n(s) = u_n[\varphi_n](t + s)$. Từ Mệnh đề 2.1, $\{u_n\}$ có dãy con hội tụ (cũng kí hiệu là $\{u_n\}$). Giả sử $u^* = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$, thì

$u_n[\varphi_n] \to u^*[\varphi^*]$ trong $C([-h,t];X)$ và $\xi^*(s) = u^*[\varphi^*](t+s), s \in [-h,0]$. Ta chỉ cần chứng minh $u^* \in \pi_t \circ \Sigma(\varphi^*)$. Lấy $f_n \in \mathcal{P}_F(u_n)$ sao cho

$$u_n(r) = S'(t)\varphi_n(0) + \mathcal{W}(f_n)(r), r \in [0,t]. \tag{2.8}$$

Từ (**F**)(2) và tính bị chặn của $\{u_n\}$, ta có $\{f_n\} \subset L^1(0,t;X)$ là bị chặn tích phân. Hơn nữa, $K(r) = F(\overline{\{u_n(r), u_n[\varphi_n]_r\}}), r \in [0,t]$, là compact và $\{f_n(r)\} \subset K(r)$, nên $\{f_n\}$ là dãy nửa compact. Áp dụng Mệnh đề 2.2, ta có $f_n \rightharpoonup f^*$ và $\mathcal{W}(f_n) \to \mathcal{W}(f^*)$. Do đó, có thể chuyển qua giới hạn (2.8) để thu được

$$u^*(r) = S'(t)\varphi^*(0) + \mathcal{W}(f^*)(r), r \in [0,t].$$

Mà $\mathcal{P}_F$ là nửa liên tục trên yếu, nên $f^* \in \mathcal{P}_F(u^*)$. Từ đó suy ra $u^* \in \pi_t \circ \Sigma(\varphi^*)$. Định lí được chứng minh. □

2.3. SỰ TỒN TẠI TẬP HÚT TOÀN CỤC

Để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục, chúng ta cần thêm giả thiết sau đây.

(S) $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm co. Ngoài ra, $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ là ổn định mũ với số mũ α, và χ-giảm với số mũ β, nghĩa là

$$\|S'(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\alpha t},\ \|S'(t)\|_\chi \leq Ne^{-\beta t}, \forall t > 0,$$

trong đó $\alpha, \beta > 0, N \geq 1$.

Ta có nhận xét rằng, nếu $\{S'(t)\}$ là nửa nhóm compact thì $\|S'(t)\|_\chi = 0, \forall t > 0$. Trong trường hợp này, ta có thể chọn $\beta = +\infty$.

Kí hiệu χ_C là độ đo Hausdorff trên $\mathcal{C}_h$. Ta có các tính chất sau của χ_C (đã được đề cập trong [3]):

1) $\sup\limits_{s\in[-h,0]} \chi(D(s)) \leq \chi_C(D)$, với mọi $D \in \mathcal{C}_h$;

2) nếu D là liên tục đồng bậc thì $\chi_C(D) = \sup_{s\in[-h,0]} \chi(D(s))$.

Ta nhắc lại bất đẳng thức Halanay (xem chứng minh trường hợp tổng quát trong [77]).

Mệnh đề 2.3. *Giả sử hàm $f : [t_0 - \tau, T) \to \mathbb{R}^+, 0 \le t_0 < T < +\infty$ thỏa mãn bất đẳng thức*

$$f'(t) \le -\gamma f(t) + \nu \sup_{s\in[t-\tau,t]} f(s),$$

với $t \ge t_0$, trong đó $\gamma > \nu > 0$. Khi đó

$$f(t) \le \kappa e^{-\ell(t-t_0)}, t \ge t_0,$$

trong đó $\kappa = \sup_{s\in[t_0-\tau,t_0]} f(s)$ và ℓ là nghiệm của phương trình $\gamma = \ell + \nu e^{-\ell\tau}$.

Sử dụng bất đẳng thức Halanay, ta chứng minh Bổ đề sau về tính nén của toán tử $G_T = G(T, \cdot)$.

Bổ đề 2.3. *Giả sử các giả thiết* (**A**), (**F**) *và* (**S**) *thỏa mãn. Nếu $\beta - 4N(p+q) > 0$ thì tồn tại $T > h$ và một số $\zeta \in [0, 1)$ sao cho*

$$\chi_C(G_T(B)) \le \zeta \cdot \chi_C(B), \text{ với mọi tập bị chặn } B \subset \mathcal{C}_h.$$

Chứng minh. Xét $B \subset \mathcal{C}_h$ là một tập bị chặn, đặt $D = \Sigma(B)$, ta có

$$D(t) \subset S'(t)B(0) + \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}\mathcal{P}_F(D)(s)ds, t \ge 0. \quad (2.9)$$

Ta có nhận xét rằng $\pi_t(D)$ bị chặn trong $C([0, t]; X)$ với mỗi $t > 0$. Do đó, nếu $\{S'(t)\}$ là compact thì $\chi(D(t)) = 0$. Trong trường hợp ngược lại, tức là $\{S'(t)\}$ là không compact. Đặt

$$v(t) = \begin{cases} \chi(D(t)), t \ge 0, \\ \chi(B(t)), t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (2.10)$$

Từ (2.9) ta có

$$\begin{aligned} v(t) &\le \chi(S'(t)B(0)) + \chi\Big(\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}\mathcal{P}_F(D)(s)ds\Big) \\ &\le Ne^{-\beta t}\chi(B(0)) + \lim_{\lambda\to+\infty}\chi\Big\{\int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}\mathcal{P}_F(D)(s)ds)\Big\} \\ &\le Ne^{-\beta t}\chi(B(0)) + 4N\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\chi(\mathcal{P}_F(D)(s))ds, \end{aligned}$$

do giả thiết (**S**) và Mệnh đề 1.5. Do đó

$$v(t) \le e^{-\beta t}[N\chi(B(0)) + 4N\int_0^t e^{\beta s}(p\chi(D(s)) + q\sup_{\theta\in[s-h,s]}\chi(D[B](\theta)))ds],$$

ở đây

$$D[B](t) = \begin{cases} D(t), & t \ge 0 \\ B(t), & t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Kí hiệu $z(t)$ là vế phải của bất đẳng thức trên và đặt $z(s) = Nv(s)$ với $s \in [-h, 0]$, ta có $v(t) \le z(t)$, $\forall t \ge -h$, và

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\beta z(t) + 4N[pv(t) + q\sup_{s\in[t-h,t]} v(s)] \\ &\le -(\beta - 4Np)z(t) + 4Nq\sup_{s\in[t-h,t]} z(s),\ t \ge 0. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Halanay cho z, ta thu được

$$z(t) \le \sup_{s\in[-h,0]} z(s)e^{-\ell t} = N\sup_{s\in[-h,0]} v(s)e^{-\ell t}, t \ge 0,$$

trong đó ℓ là nghiệm của phương trình $\beta - 4Np = \ell + 4Nqe^{\ell h}$. Do đó

$$v(t) \le z(t) \le N\sup_{s\in[-h,0]}\chi(B(s))e^{-\ell t} \le N\chi_C(B)e^{-\ell t}, t \ge 0,$$

nhờ định nghĩa của v trong (2.10). Từ đó ta có

$$\sup_{\theta\in[-h,0]} v(T+\theta) \le N\chi_C(B)e^{-\ell(T-h)}.$$

Từ (2.9), ta có

$$D_T(\theta) \subset S'(T+\theta)B(0) + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{T+\theta} S'(T+\theta-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}\mathcal{P}_F(D)(s)ds,$$
$$\subset S'(T+\theta)B(0) + \mathcal{W}\circ\mathcal{P}_F(D)(T+\theta), \theta\in[-h,0].$$

Do $T > h$ và $S'(\cdot)$ là liên tục theo chuẩn, nên $S'(T+\cdot)B(0)$ liên tục đồng bậc trong $\mathcal{C}_h$. Từ Mệnh đề 2.2, suy ra $\mathcal{W}\circ\mathcal{P}_F(D)(T+\cdot)$ cũng là liên tục đồng bậc trong $\mathcal{C}_h$. Tức là, D_T cũng liên tục đồng bậc. Từ đây ta suy ra

$$\chi_C(D_T) = \sup_{\theta\in[-h,0]}\chi(D(T+\theta)) = \sup_{\theta\in[-h,0]} v(T+\theta) \le \zeta\cdot\chi_C(B),$$

với $\zeta = Ne^{-\ell(T-h)}$. Cuối cùng, chọn $T > h + \frac{1}{\ell}\ln N$ và nhận xét

$$G_T(B) = \Sigma(B)_T = D_T,$$

ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.4. *Giả sử rằng* (**A**), (**F**) *và* (**S**) *thỏa mãn. Khi đó G có một tập hấp thụ bị chặn, với điều kiện $\alpha > a + b$.*

Chứng minh. Với $t > 0$ và $B \subset \mathcal{C}_h$ là một tập bị chặn, $\varphi \in B, \|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} \le C$, ta xét $u[\varphi]$ xác định bởi

$$u(t) = S'(t)\varphi(0) + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1}f(s)ds,$$

với $f \in \mathcal{P}_F(u)$. Sử dụng giả thiết (**F**)(2) và (**S**), ta có

$$\|u(t)\| \le e^{-\alpha t}\|\varphi(0)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}[a\|u(s)\| + b\|u_s\|_{\mathcal{C}_h} + c]ds. \tag{2.11}$$

Do $\alpha - a > b$, ta có thể chọn $R > 0$ sao cho $b + \frac{c}{R} = d < \alpha - a$. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh nghiệm $u[\varphi]$ thỏa mãn tính chất: $\exists t_0 > 0$ sao cho $\|u_{t_0}\|_{\mathcal{C}_h} \le R$. Giả sử ngược lại: với mọi $t > 0$, $\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} > R$ thì

$$b\|u_s\|_{\mathcal{C}_h} + c = \|u_s\|_{\mathcal{C}_h}\left(b + \frac{c}{\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}}\right) \le \|u_s\|_{\mathcal{C}_h}\left(b + \frac{c}{R}\right) = d\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}, \forall s \ge 0.$$

Do đó, biểu thức (2.11) cho ta

$$\|u(t)\| \leq e^{-\alpha t}\|\varphi(0)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}[a\|u(s)\| + d\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}]ds, \quad t \geq 0.$$

Đặt

$$v(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}\|\varphi(0)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}[a\|u(s)\| + d\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}]ds, & t \geq 0, \\ \|\varphi(t)\|, \qquad t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Từ đó ta có $\|u(t)\| \leq v(t)$, $\forall t \geq -h$ và

$$v'(t) \leq -(\alpha - a)v(t) + d \sup_{s\in[t-h,t]} v(s), t \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Halanay, ta thu được

$$\|u(t)\| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}_h} e^{-\ell t} \leq Ce^{-\ell t} \text{ với mọi } t \geq 0,$$

trong đó ℓ là một số dương.

Vậy,

$$R < \|u_t\|_{\mathcal{C}_h} = \sup_{\theta\in[-h,0]} \|u(t+\theta)\| \leq Ce^{-\ell(t+\theta)}, \quad \forall t \geq h. \tag{2.12}$$

Với t là đủ lớn, thì (2.12) mâu thuẫn với điều giả sử.

Như vậy, ta vừa chứng minh được: với mỗi $\|\varphi\| \leq C$, tồn tại $t_0 > 0$ sao cho $\|u_{t_0}\|_{\mathcal{C}_h} \leq R$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} \leq R, \forall t \geq t_0$. Giả sử ngược lại rằng tồn tại $t_1 \geq t_0$ sao cho

$$\|u_{t_1}\|_{\mathcal{C}_h} \leq R \text{ nhưng } \|u_t\|_{\mathcal{C}_h} > R \text{ với mọi } t \in (t_1, t_1 + \theta),$$

với $\theta > 0$. Xét $u[\varphi]$ trên $[t_1, t_1 + \theta)$, ta có

$$u(t) = S'(t - t_1)u(t_1) + \lim_{\lambda\to\infty} \int_{t_1}^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s)ds,$$

trong đó $f \in \mathcal{P}_F(u)$. Do đó

$$\|u(t)\| \leq e^{-\alpha(t-t_1)}\|u(t_1)\| + \int_{t_1}^t e^{-\alpha(t-s)}[a\|u(s)\| + d\|u_s\|_{\mathcal{C}_h}]ds, t \in [t_1, t_1 + \theta).$$

Lí luận tương tự như ở trên, với mọi $t \in [t_1, t_1 + \theta)$ thì

$$\|u(t)\| \leq \|u_{t_1}\|_{\mathcal{C}_h} e^{-\ell(t-t_1)} \leq \|u_{t_1}\|_{\mathcal{C}_h} \leq R.$$

Do đó, với $t \in (t_1, t_1 + \theta)$, ta có

$$\begin{aligned}
\|u_t\|_{\mathcal{C}_h} &= \sup_{s\in[-h,0]} \|u(t+s)\| = \sup_{r\in[t-h,t]} \|u(r)\| \\
&\leq \sup_{r\in[t_1-h,t]} \|u(r)\| \\
&= \max\{\sup_{r\in[t_1-h,t_1]} \|u(r)\|, \sup_{r\in[t_1,t]} \|u(r)\|\} \\
&= \max\{\|u_{t_1}\|_{\mathcal{C}_h}, \sup_{r\in[t_1,t]} \|u(r)\|\} \leq R,
\end{aligned}$$

mâu thuẫn với điều giả sử. Vậy, ta có thể chọn hình cầu tâm 0 với bán kính R là một tập hấp thụ của nửa dòng đa trị G, ở đó R được chọn thỏa mãn $R > \dfrac{c}{\alpha - a - b}$.

□

Bổ đề 2.5. *Giả sử* (**A**), (**F**) *và* (**S**) *thỏa mãn. Nếu* $\beta - 4N(p+q) > 0$, *thì* G *là tiệm cận trên nửa compact.*

Chứng minh. Lấy $B \subset \mathcal{C}_h$ là một tập con bị chặn và Ξ_B là họ tất cả các dãy $\{\xi_k : \xi_k \in G(t_k, B), t_k \to \infty\}$. Kí hiệu

$$\mu = \sup\{\chi_C(\Omega) : \Omega \in \Xi_B\}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\mu = 0$. Giả sử ngược lại rằng $\mu > 0$, khi đó với $\theta \in (0, (1-\zeta)\mu)$, tồn tại $\Omega_\theta = \{\xi_k\} \in \Xi_B$ sao cho

$$\chi_C(\Omega_\theta) > \mu - \theta.$$

Ở đây, ζ được lấy ở Bổ đề 2.3. Cố định $T > h$, với mỗi $t_k \in (T, \infty)$ tồn tại một số $m_k \in \mathbb{N}$ sao cho $t_k = m_k T + r_k, r_k \in [0, T)$. Lấy $\tau_k = (m_k - 1)T + r_k$, thì

$\xi_k \in G(t_k, B) = G(T + \tau_k, B) = G_T(G(\tau_k, B))$, có thể lấy $\eta_k \in G(\tau_k, B)$ sao cho $\xi_k \in G_T(\eta_k)$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\chi_C(\Omega_\theta) &= \chi_C(\{\xi_k\}) \\ &\leq \chi_C(G_T(\{\eta_k\})) \leq \zeta\chi_C(\{\eta_k\}) \leq \zeta\mu < \mu - \theta.\end{aligned}$$

Mâu thuẫn với điều giả sử. Định lí được chứng minh. □

Kết hợp các Bổ đề 2.2, 2.4 và 2.5, ta thu được kết quả về sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị G.

Định lí 2.2. *Giả sử rằng các giả thiết* (**A**), (**F**) *và* (**S**) *thỏa mãn. Khi đó, nửa dòng đa trị G sinh bởi hệ* (2.1)-(2.2) *có một tập hút toàn cục compact trong $\mathcal{C}_h$ với điều kiện*

$$\min\{\alpha - (a + b), \beta - 4N(p + q)\} > 0.$$

2.4. ÁP DỤNG

2.4.1. Bao hàm thức trong miền bị chặn

Giả sử Ω là một tập bị chặn, mở trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn $\partial\Omega$ và $\mathcal{O} \subset \Omega$ là một tập con mở. Xét bài toán

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta_x u(t, x) + \lambda u(t, x) = f(x, u(t, x)) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)v_i(t), x \in \Omega, t > 0, \tag{2.13}$$

$$v_i(t) \in \left[\int_{\mathcal{O}} k_{1,i}(y)u(t - h, y)dy, \int_{\mathcal{O}} k_{2,i}(y)u(t - h, y)dy\right], 1 \leq i \leq m, \tag{2.14}$$

$$u(t, x) = 0,\ x \in \partial\Omega, t \geq 0, \tag{2.15}$$

$$u(s, x) = \varphi(s, x),\ x \in \Omega, s \in [-h, 0], \tag{2.16}$$

trong đó Δ_x là toán tử Laplace theo biến không gian x, $\lambda > 0$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục, $b_i \in C(\overline{\Omega}), k_{j,i} \in L^1(\mathcal{O})$ với $i \in \{1, ..., m\}, j = 1, 2$, và $\varphi \in \mathcal{C}_h = C([-h, 0]; C(\overline{\Omega}))$.

Mô hình này có thể coi như một bài toán điều khiển với điều khiển $v = (v_1, ..., v_m)$, cho bởi dạng phản hồi được biểu diễn bởi bao hàm thức (2.14). Ở đây, khoảng $[z_1, z_2] = \{\tau z_1 + (1-\tau)z_2 : \tau \in [0,1]\}$.

Trong ví dụ này, ta đặt $u(t)(x) = u(t,x)$ và xem hàm cần tìm u là một hàm véc tơ xác định trên $\mathbb{R}^+$ và nhận giá trị trong $C(\overline{\Omega})$. Đặt

$$X = C(\overline{\Omega}),$$
$$X_0 = C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\},$$

ở đây X và X_0 được trang bị chuẩn sup $\|v\| = \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$. Ta định nghĩa

$$A_1 v = \Delta v,$$
$$v \in D(A_1) = \{v \in C_0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta v \in C(\overline{\Omega})\},$$

trong đó Δ là toán tử Laplace trên Ω. Hiển nhiên,

$$\overline{D(A_1)} = X_0 \subsetneqq X.$$

Áp dụng kết quả trong [69, Định lí 5] (cho trường hợp $m = 1$), ta có: nếu $\partial\Omega$ là chính quy địa phương thuộc lớp $C^{2,\mu}, \mu > 0$ (xem [69]), thì A_1 sinh ra một nửa nhóm giải tích $\{e^{tA_1}\}_{t\geq 0}$ trên X_0. Hơn nữa, do phép nhúng $D(A_1) \subset X_0$ là compact, ở đây $D(A_1)$ được xác định với chuẩn $\|v\|_{A_1} = \|v\|_X + \|\Delta v\|_X$, nên A_1 có giải thức compact (xem [34, Mệnh đề 4.25]) và do đó nửa nhóm $\{e^{tA_1}\}_{t\geq 0}$ là compact. Mặt khác, từ [75, Định lí 4.1.4], ta có $\{e^{tA_1}\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm co, tức là

$$\|e^{tA_1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall t > 0.$$

Đặt $A = A_1 - \lambda I$. Ta thấy rằng, A sinh ra một nửa nhóm compact và giải tích $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ trên X_0 mà

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\lambda t}, \forall t > 0.$$

Bây giờ, ta đặt $F_1 : X_0 \to X$, $F_2 : C([-h,0];X) \to \mathcal{P}(X)$ với

$$F_1(v)(x) = f(x, v(x)), \tag{2.17}$$

$$F_2(w)(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i(x) \left[\int_{\mathcal{O}} k_{1,i}(y) w(-h,y) dy, \int_{\mathcal{O}} k_{2,i}(y) w(-h,y) dy \right]. \tag{2.18}$$

Như vậy, bài toán (2.13)-(2.16) là một mô hình cụ thể của bài toán trừu tượng (2.1)-(2.2) với $F(v,w) = F_1(v) + F_2(w)$.

Ta giả thiết thêm rằng, tồn tại các hàm $a, b \in C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn

$$|f(x,r)| \leq a(x)|r| + b(x), \forall x \in \Omega, r \in \mathbb{R}.$$

Ta thu được

$$\|F_1(v)\| \leq \|a\| \cdot \|v\| + \|b\|, \forall v \in C_0(\overline{\Omega}).$$

Với F_2, ta có

$$\|F_2(w)\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|b_i\| \max\{\int_{\mathcal{O}} |k_{1,i}(y)| dy; \int_{\mathcal{O}} |k_{2,i}(y)| dy\} \cdot \|w\|_{\mathcal{C}_h}.$$

Từ Định lí 2.2, nửa dòng sinh bởi (2.13)-(2.16) có môt tập hút toàn cục compact trong $C([-h,0]; C(\overline{\Omega}))$ nếu

$$\|a\| + \sum_{i=1}^{m} \|b_i\| \max\{\int_{\mathcal{O}} |k_{1,i}(y)| dy; \int_{\mathcal{O}} |k_{2,i}(y)| dy\} < \lambda.$$

2.4.2. Bao hàm thức trong miền không bị chặn

Ta chú ý rằng, nếu A sinh ra một C_0-nửa nhóm $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ trên X thì nó cũng sinh ra một nửa nhóm tích phân $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, được xác định bởi

$$S(t)v = \int_0^t T(s)v ds, v \in X.$$

Do đó kết quả của chúng ta có thể áp dụng trong trường hợp này. Ta lại xét bài toán (2.13)-(2.16) nhưng trong miền $\Omega = \mathbb{R}^n$ và $\mathcal{O}$ là miền bị chặn trong

$\mathbb{R}^n$. Ta có thể viết lại như sau

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta_x u(t,x) + \lambda u(t,x) = f(x,u(t,x)) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)v_i(t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{2.19}$$

$$v_i(t) \in \left[\int_{\mathcal{O}} k_{1,i}(y)u(t-h,y)dy, \int_{\mathcal{O}} k_{2,i}(y)u(t-h,y)dy\right], 1 \le i \le m, \tag{2.20}$$

$$u(s,x) = \varphi(s,x),\ x \in \mathbb{R}^n, s \in [-h,0]. \tag{2.21}$$

Trong mô hình này, ta giả thiết

1) $b_i \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $k_{j,i} \in L^2(\mathcal{O}), j = 1,2; 1 \le i \le m$ và $\varphi \in C([-h,0]; L^2(\mathbb{R}^n))$;

2) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(\cdot,z)$ là đo được với mỗi $z \in \mathbb{R}$ và tồn tại $\kappa \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mà

$$|f(x,z_1) - f(x,z_2)| \le \kappa(x)|z_1 - z_2|, \forall x \in \mathbb{R}^n, z_1, z_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Đặt

$$A_1 v = \Delta v, v \in D(A_1) = H^2(\mathbb{R}^n),$$
$$X = L^2(\mathbb{R}^n).$$

Ta đã biết rằng A_1 sinh ra một nửa nhóm giải tích $T_1(\cdot)$ trên X (xem chứng minh tại [34, Định lí 5.15]). Hơn nữa, $T_1(\cdot)$ là một nửa nhóm co. Do đó, $A = A_1 - \lambda I$ sinh ra một nửa nhóm giải tích $T(\cdot)$ xác định bởi $T(t) = e^{-\lambda t}T_1(t)$ và

$$\|T(t)\| \le e^{-\lambda t}, \forall t > 0.$$

Suy ra $T(\cdot)$ là nửa nhóm ổn định mũ và χ-giảm với số mũ λ.

Xét F_1, F_2 cho bởi (2.17)-(2.18). Từ (2.22), ta thu được

$$\|F_1(v_1) - F_1(v_2)\| \le \|\kappa\| \cdot \|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in X.$$

Vậy

$$\chi(F_1(B)) \le \|\kappa\| \cdot \chi(B), \forall B \in \mathcal{B}(X).$$

Mặt khác, với tập bị chặn $C \subset C([-h,0];X)$ ta thấy rằng $F_2(C)$ là tập con bị chặn của một không gian vô hạn chiều sinh bởi $\{b_i\}_{i=1}^m$. Do đó

$$\chi(F_2(C)) = 0.$$

Đặt $F(v,w) = F_1(v) + F_2(w)$, thì

$$\chi(F(B,C)) \leq \chi(F_1(B)) + \chi(F_2(C)) \leq \|\kappa\| \cdot \chi(B),$$

với mọi $B \in \mathcal{B}(X), C \in \mathcal{B}(C([-h,0];X))$. Do đó, F thỏa mãn $(\mathbf{F})(3)$ với $p = \|\kappa\|, q = 0$.

Bây giờ, ta kiểm tra điều kiện $(\mathbf{F})(2)$. Ta có

$$\|F_1(v)\| \leq \|\kappa\| \cdot \|v\| + \|f(\cdot,0)\|,$$
$$\|F_2(w)\| \leq \sum_{i=1}^m \|b_i\| \max\{\|k_{1,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}, \|k_{2,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}\} \cdot \|w\|_{C([-h,0];X)}.$$

Vậy, điều kiện $(\mathbf{F})(2)$ được thỏa mãn với

$$a = \|\kappa\|, b = \sum_{i=1}^m \|b_i\| \max\{\|k_{1,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}, \|k_{2,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}\}.$$

Từ Định lí 2.2, ta thu được định lí sau về sự tồn tại tập hút toàn cục.

Định lí 2.3. *Nửa dòng đa trị sinh bởi hệ* (2.19)-(2.21) *có tập hút toàn cục compact trong* $C([-h,0];L^2(\mathbb{R}^n))$ *với điều kiện*

$$\max\{4\|\kappa\|, \|\kappa\| + \sum_{i=1}^m \|b_i\| \max\{\|k_{1,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}, \|k_{2,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}\} < \lambda.$$

Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bao hàm thức vi phân có trễ hữu hạn với phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh sự tồn tại nghiệm toàn cục đối với bài toán (Định lí 2.1).

2) Chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng sinh bởi bài toán (Định lí 2.2).

3) Đưa ra hai bài toán minh họa cho kết quả trừu tượng, một bao hàm thức trong miền bị chặn và một bao hàm thức trên toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$ (Mục 2.4).

Trong các lược đồ chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của Ball và của Melnik-Valero, việc chỉ ra tính compact tiệm cận của nửa dòng là một bước quan trọng và khó. Thông thường, tính chất này thỏa mãn nếu nửa nhóm sinh bởi phần tuyến tính (trong bài toán này là $S'(\cdot)$) là compact. Tuy nhiên, với các hệ đạo hàm riêng trong miền không bị chặn thì yêu cầu này là không thực tế. Trong chứng minh của chúng tôi, nửa nhóm $S'(\cdot)$ được giả thiết là liên tục theo chuẩn, không nhất thiết compact. Ở đây, chúng tôi đã sử dụng cách tiếp cận bằng các ước lượng độ đo không compact để khắc phục khó khăn khi loại bỏ tính compact của nửa nhóm $S'(\cdot)$ cũng như tính liên tục Lipschitz của phần phi tuyến. Hơn nữa, nhờ các ước lượng dựa vào bất đẳng thức Halanay, chúng tôi cũng thu được tính chất tán xạ bị chặn của nửa dòng G dưới các giả thiết nhẹ hơn so với các giả thiết đã đưa ra trong [76].

Chương 3

NGHIỆM ĐỐI TUẦN HOÀN CỦA BAO HÀM THỨC VI PHÂN NỬA TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho một lớp bao hàm thức vi phân có dạng đa diện mà phần tuyến tính của nó sinh ra một nửa nhóm tích phân. Sử dụng cách tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm và áp dụng các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại của nghiệm đối tuần hoàn cho bài toán tổng quát này.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số 4 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach. Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán sau

$$u'(t) \in Au(t) + F(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$u(t+T) = -u(t), t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

trong đó u nhận giá trị trong X, $F(t, u(t)) = \overline{\text{co}}\{f_1(t, u(t)), \cdots, f_n(t, u(t))\}$, ở đây $\overline{\text{co}}$ là ký hiệu bao lồi đóng; A là toán tử thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida có miền xác định $D(A)$ không trù mật, tức là $\overline{D(A)} \neq X$.

3.2. SỰ TỒN TẠI CỦA LỚP NGHIỆM ĐỐI TUẦN HOÀN

Ta ký hiệu $BC(\mathbb{R}; X)$ là không gian Banach các hàm liên tục, bị chặn từ $\mathbb{R}$ vào X với chuẩn

$$\|u\|_{BC(\mathbb{R};X)} = \sup\{\|u(t)\| : t \in \mathbb{R}\},$$

ký hiệu $L^1_{loc}(\mathbb{R}; X)$ là tập tất cả các hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và lấy giá trị trong X, và khả tích cục bộ theo nghĩa Bochner.
Một hàm $u \in BC(\mathbb{R}; X)$ được gọi là $T-$ đối tuần hoàn nếu

$$u(t+T) = -u(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ký hiệu $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ là tập tất cả các hàm $T-$đối tuần hoàn từ $\mathbb{R}$ vào X. Ta thấy rằng $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ cùng với chuẩn sup là một không gian Banach.

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn của bài toán, ta giả thiết toán tử A và các hàm f_i $(i = 1, \cdots, n)$ thỏa mãn các điều kiện sau.

(**A**) *Toán tử A thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida. Hơn nữa, nửa nhóm $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi A trên $\overline{D(A)}$ là nửa nhóm hyperbolic.*

(**F**) *Các hàm $f_i : \mathbb{R} \times \overline{D(A)} \to X, i = 1, \cdots, n$ thỏa mãn:*

(1) *$f_i(\cdot, x)$ đo được mạnh với mọi $x \in \overline{D(A)}$ và $f_i(t, \cdot)$ liên tục với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$;*

(2) *$\|f_i(t, x)\| \leq m(t)(\|x\| + 1)$, với mọi $x \in \overline{D(A)}$, trong đó $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$;*

(3) *nếu $\{S'(t)\}$ không compact, thì $\chi(f_i(t, B)) \leq k(t)\chi(B)$, với mọi tập bị chặn $B \subset \overline{D(A)}$, trong đó $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$,*

(4) *$f_i(t + T, -x) = -f_i(t, x)$ với mọi $x \in \overline{D(A)}$.*

Nhận xét 3.1. *Chúng ta có nhận xét về giả thiết* (**F**)(3) *như sau: nếu $f_i(t, \cdot)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz, tức là*

$$||f_i(t, v_1) - f_i(t, v_2)|| \leq k(t)(||v_1 - v_2||),$$

thì (**F**)(3) *được thỏa mãn. Hơn nữa, nếu $S'(t), t > 0$, là compact hoặc $f_i(t, \cdot)$ là hoàn toàn liên tục (với mỗi t cố định) thì* (**F**)(3) *cũng được thỏa mãn với $k = 0$.*

Ký hiệu $L^1_{TA}(\mathbb{R}; X)$ là tập tất cả các hàm khả tích địa phương có tính chất $T-$đối tuần hoàn từ $\mathbb{R}$ vào X

$$L^1_{TA}(\mathbb{R}; X) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; X) : f(t+T) = -f(t), \text{ hầu khắp } t \in \mathbb{R}\}.$$

Ta thấy rằng $L^1_{TA}(\mathbb{R}; X)$ cùng với chuẩn

$$\|f\|_{L^1_{TA}(\mathbb{R};X)} = \int_0^{2T} \|f(t)\| dt$$

là một không gian Banach.

Với $v \in BC(\mathbb{R}; X)$, đặt

$$\mathcal{P}^{TA}_F(v) = \{f \in L^1_{TA}(\mathbb{R}; X) : f(t) \in F(t, v(t)), \text{ hầu khắp } t \in \mathbb{R}\}.$$

Ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.1. *Giả sử* $(\mathbf{F})(1) - (\mathbf{F})(2)$ *thỏa mãn. Khi đó*

$$\mathcal{P}^{TA}_F : BC(\mathbb{R}; X) \to \mathcal{P}(L^1_{TA}(\mathbb{R}; X))$$

là nửa liên tục trên yếu nhận giá trị lồi và compact yếu.

Chứng minh. Từ định nghĩa ta có ngay $\mathcal{P}^{TA}_F(v) \neq \emptyset$, $\mathcal{P}^{TA}_F(v)$ là lồi và compact yếu với mọi $v \in BC(\mathbb{R}; X)$. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{P}^{TA}_F$ là nửa liên tục trên yếu. Giả sử $\{u_n\} \subset BC(\mathbb{R}; X)$ với $u_n \to u$ và $w_n \in \mathcal{P}^{TA}_F(u_n)$. Từ $(\mathbf{F})(2)$, $\{w_n : n \geq 1\} \subset L^1_{TA}(\mathbb{R}; X)$ là khả tích đều. Ngoài ra, dãy w_n thỏa mãn $w_n(t) \in C(t) := F(t, \overline{\{u_n(t) : n \geq 1\}})$ và tập $C(t)$ là compact yếu. Do đó chúng ta có thể giả sử $w_n \rightharpoonup w$ trong $L^1_{TA}(\mathbb{R}; X)$.

Từ định lí Mazur, tồn tại $\bar{w}_n \in \text{conv}\{w_k : k \geq n\}$ sao cho $\bar{w}_n \to w$ trong $L^1_{TA}(\mathbb{R}; X)$, do đó $\bar{w}_n(t) \to w(t)$ hầu khắp $t \in [0; 2T]$. Để chứng minh $w(t) \in F(t, u(t))$ hầu khắp $t \in [0, 2T]$, ta lập luận như sau. Lấy $t \in [0, 2T]$ sao cho $w(t) \in F(t, u_n(t))$ với mọi $n \geq 1$ và $\bar{w}_n(t) \to w(t)$. Với $\epsilon > 0$ cho trước, ta có $w_n(t) \in F(t, u(t)) + \epsilon B(0; \epsilon)$ với n đủ lớn, do vậy $\bar{w}_n(t) \in F(t, u(t)) + \epsilon B(0, \epsilon)$

với n đủ lớn, do tính chất lồi của vế phải. Từ đó, $w(t) \in F(t, u(t))$ và mệnh đề được chứng minh. $\square$

Ta định nghĩa nghiệm tích phân của bài toán như sau.

Định nghĩa 3.1. Một nghiệm tích phân của bài toán (3.1)-(3.2) là một hàm $u \in P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ thỏa mãn phương trình tích phân

$$u(t) = S'(t-s)u(s) + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_s^t S'(t-s)R_\lambda f(s)ds,$$

trong đó $R_\lambda = \lambda(\lambda I - A)^{-1}$, với mọi $t > s$ và $s \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{P}_F^{TA}(u)$.

Trước khi đi vào chứng minh định lí chính, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. *Cho $g \in L^1_{TA}(\mathbb{R}; X)$, ta định nghĩa*

$$(\Phi g)(t) := \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^t S'(t-\tau)PR_\lambda g(\tau)d\tau - \lim_{\lambda \to +\infty} \int_t^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda g(\tau)d\tau,$$

với $t \in \mathbb{R}$. Khi đó $(\Phi g)(t)$ được xác định với mỗi $t \in \mathbb{R}$ và Φg thuộc vào $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$.

Chứng minh. Ta ký hiệu

$$\mathcal{W}_1(g)(t) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^t S'(t-\tau)PR_\lambda g(\tau)d\tau,$$

$$\mathcal{W}_2(g)(t) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_t^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda g(\tau)d\tau,$$

như vậy, $(\Phi g)(t) := \mathcal{W}_1(g)(t) - \mathcal{W}_2(g)(t)$.

Đầu tiên, ta có $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, do $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}v = v$, với mọi $v \in \overline{D(A)}$.

Từ điều kiện (1.2) về tính hyperbolic của $\{S'(t)\}$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{W}_1(g)(t)\| &\leq \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}\|S'(t-\tau)PR_\lambda g(\tau)\|d\tau \\
&\leq \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}Ne^{-\delta(t-\tau)}\|R_\lambda\|.\|g(\tau)\|d\tau \\
&\leq N\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-\tau)}\|g(\tau)\|d\tau \\
&\leq \frac{N}{1-e^{-\delta T}}\int_{t-T}^{t}\|g(\tau)\|d\tau \\
&= \frac{N}{1-e^{-\delta T}}\int_{0}^{T}\|g(\tau)\|d\tau.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có đánh giá:

$$\|\mathcal{W}_2(g)(t)\| \leq \frac{N}{1-e^{-\delta T}}\int_{0}^{T}\|g(\tau)\|d\tau.$$

Do đó, Φg xác định và bị chặn.

Mặt khác, với mỗi $t, h \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
&\|(\Phi g)(t+h) - (\Phi g)(t)\| \\
&= \Big\| \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{t+h} S'(t+h-\tau) P R_\lambda g(\tau) d\tau \\
&\qquad - \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t+h}^{+\infty} S'(t+h-\tau) Q R_\lambda g(\tau) d\tau \\
&\qquad - \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} S'(t-\tau) P R_\lambda g(\tau) d\tau + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t}^{+\infty} S'(t-\tau) Q R_\lambda g(\tau) d\tau \Big\| \\
&\leq \Big\| \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} S'(t+h-\tau) P R_\lambda g(\tau) d\tau - \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} S'(t-\tau) P R_\lambda g(\tau) d\tau \\
&\qquad + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t}^{t+h} S'(t+h-\tau) P R_\lambda g(\tau) d\tau \\
&\qquad + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t}^{+\infty} S'(t-\tau) Q R_\lambda g(\tau) d\tau \\
&\qquad - \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t}^{+\infty} S'(t+h-\tau) Q R_\lambda g(\tau) d\tau \\
&\qquad + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t}^{t+h} S'(t+h-\tau) Q R_\lambda g(\tau) d\tau \Big\| \\
&\leq \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} \|(S'(t+h-\tau) - S'(t-\tau)) P R_\lambda g(\tau)\| d\tau \\
&\qquad + \int_{t}^{t+h} \|S'(t+h-\tau) P g(\tau)\| d\tau \\
&\qquad + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t}^{+\infty} \|(S'(t+h-\tau) - S'(t-\tau)) Q R_\lambda g(\tau)\| d\tau \\
&\qquad + \int_{t}^{t+h} \|S'(t+h-\tau) Q g(\tau)\| d\tau \\
&:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}
$$

Ta có

$$
I_2 = \int_{t}^{t+h} \|S'(t+h-\tau) P g(\tau)\| d\tau \leq N \int_{t}^{t+h} e^{-\delta(t+h-\tau)} \|g(\tau)\| d\tau,
$$

kéo theo $\lim\limits_{h \to 0} I_2 = 0$. Lí luận tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{h \to 0} I_4 = 0$.
Với I_1, do $t \mapsto S'(t),\ t > 0$ là liên tục, sử dụng định lí hội tụ trội Lebesgue, ta

thu được

$$\lim_{h\to 0} I_1 = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{t} \|[S'(t+h-\tau)-S'(t-\tau)]Pg(\tau)\|d\tau = 0.$$

Tương tự, ta có $\lim\limits_{h\to 0} I_3 = 0$. Do đó, Φg liên tục.
Cuối cùng, với mỗi $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(\Phi g)(t+T) &= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{t+T} S'(t+T-\tau)PR_\lambda g(\tau)d\tau \\
&\quad - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{t+T}^{+\infty} S'(t+T-\tau)QR_\lambda g(\tau)d\tau \\
&= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} S'(t-\tau)PR_\lambda g(\tau+T)d\tau \\
&\quad - \lim\int_{t}^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda g(\tau+T)d\tau \\
&= -\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} S'(t-\tau)PR_\lambda g(\tau)d\tau \\
&\quad + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{t}^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda g(\tau)d\tau \\
&= -(\Phi g)(t).
\end{aligned}$$

Do đó, Φg là $T-$đối tuần hoàn.

□

Bây giờ, ta xét toán tử đa trị $\mathcal{F} : P_{TA}(\mathbb{R};X) \to \mathcal{P}(P_{TA}(\mathbb{R};X))$ được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v)(t) = \Big\{ &\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} S'(t-\tau)PR_\lambda f(\tau)d\tau \\
&- \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{t}^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau : f \in \mathcal{P}_F^{TA}(v)\Big\}.
\end{aligned}$$

Mệnh đề 3.2. *Một hàm $u \in P_{TA}(\mathbb{R};X)$ là nghiệm tích phân của bài toán* (3.1)-(3.2) *nếu và chỉ nếu nó là một điểm bất động của $\mathcal{F}$.*

Chứng minh. Đầu tiên, ta giả sử $u \in P_{TA}(\mathbb{R};X)$ là một nghiệm tích phân của

(3.1)-(3.2), khi đó với mọi $t > s$,

$$Pu(t) = S'(t-s)Pu(s) + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_s^t S'(t-\tau)PR_\lambda f(\tau)d\tau, \tag{3.3}$$

$$Qu(t) = S'(t-s)Qu(s) + \lim_{\lambda\to+\infty}\int_s^t S'(t-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau, \tag{3.4}$$

với $f \in \mathcal{P}_F^{TA}(u)$. Cho $s \to -\infty$ trong (3.3) và $s \to +\infty$ trong (3.4), ta có

$$Pu(t) = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^t S'(t-\tau)PR_\lambda Pf(\tau)d\tau,$$

$$Qu(t) = -\lim_{\lambda\to+\infty}\int_t^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau,$$

nhờ tính chất (1.2). Do đó ta thu được

$$\begin{aligned} u(t) &= Pu(t) + Qu(t) \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^t S'(t-\tau)PR_\lambda f(\tau)d\tau - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_t^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

Vậy u là một điểm bất động của $\mathcal{F}$.

Ngược lại, giả sử $u \in P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ là một điểm bất động của $\mathcal{F}$, nghĩa là u thỏa mãn phương trình

$$u(s) = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^s S'(s-\tau)PR_\lambda f(\tau)d\tau - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_s^{+\infty} S'(s-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau, \tag{3.5}$$

với $s \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{P}_F^{TA}(\mathbb{R}; X)$. Khi đó, với mọi $t > s, s \in \mathbb{R}$, tác động hai vế của

(3.5) bởi $S'(t-s)$, ta có

$$\begin{aligned}
S'(t-s)u(s) &= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{s} S'(t-\tau)PR_\lambda f(\tau)d\tau \\
&\quad - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{s}^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau \\
&= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} S'(t-\tau)PR_\lambda f(\tau)d\tau \\
&\quad - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{s}^{t} S'(t-\tau)PR_\lambda f(\tau)d\tau \\
&\quad - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{t}^{+\infty} S'(t-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau \\
&\quad - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{s}^{t} S'(t-\tau)QR_\lambda f(\tau)d\tau \\
&= u(t) - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{s}^{t} S'(t-\tau)R_\lambda f(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

do đó u là một nghiệm tích phân của bài toán (3.1)-(3.2). Mệnh đề được chứng minh. □

Nếu $\Omega \subset L^1_{TA}(\mathbb{R};X)$ thỏa mãn, với mọi $f \in \Omega, \|f(t)\| \le \nu(t)$ với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$, trong đó $\nu \in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$, thì ta nói rằng Ω là bị chặn tích phân trong $L^1_{TA}(\mathbb{R};X)$.

Định nghĩa 3.2. Một dãy $\{f_n\} \subset L^1_{TA}(\mathbb{R};X)$ được gọi là nửa compact nếu nó là bị chặn tích phân trong $L^1_{TA}(\mathbb{R};X)$ và $\{f_n(t)\} \in K(t)$, với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$, trong đó $K(t) \subset X, t \in \mathbb{R}$, là một họ các tập compact.

Ta có bổ để sau đây, chứng minh của bổ đề này tương tự như trong [59, Mệnh đề 7].

Mệnh đề 3.3. *Giả sử* (**A**) *thỏa mãn. Nếu* $D \subset L^1_{TA}(\mathbb{R};X)$ *là một tập bị chặn tích phân trong* $L^1_{TA}(\mathbb{R};X)$ *và mỗi tập* $D(t) = \{f(t) : f \in D\}$ *là compact tương đối với hầu khắp* $t \in \mathbb{R}$ *thì* $\mathcal{W}_1(D), \mathcal{W}_2(D)$ *là compact tương đối trong* $P_{TA}(\mathbb{R};X)$. *Đặc biệt, nếu* $D = \{f_n\}$ *là một dãy nửa compact thì*

$\{\mathcal{W}_1(f_n)\}, \{\mathcal{W}_2(f_n)\}$ *là compact tương đối trong* $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$. *Hơn nữa, nếu* $f_n \rightharpoonup f^*$ *trong* $L^1_{TA}(\mathbb{R}; X)$ *thì* $\mathcal{W}_i(f_n) \to \mathcal{W}_i(f^*), i = 1, 2$ *trong* $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$.

Ta có kết quả sau đây về sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn của bài toán (3.1)-(3.2).

Định lí 3.1. *Giả sử rằng* (**A**) *và* (**F**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (3.1)-(3.2) *có ít nhất một nghiệm tích phân với điều kiện*

$$\frac{2N}{1 - e^{-\delta T}} \int_0^T m(s)ds < 1. \tag{3.6}$$

Chứng minh. Bước 1: Đầu tiên, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại một hình cầu đóng B_R tâm 0 bán kính R trong $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ thỏa mãn $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại dãy $\{v_n\} \subset P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ sao cho $\|v_n\|_{P_{TA}(\mathbb{R};X)} \leq n$ nhưng $\exists z \in \mathcal{F}(v_n)$ mà $\|z\|_{P_{TA}(\mathbb{R};X)} > n$. Do $z \in \mathcal{F}(v_n), z(t) = \mathcal{W}_1(f)(t) - \mathcal{W}_2(f)(t), t \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{P}_F^{TA}(v_n)$. Lí luận tương tự như trong Bổ đề 3.1, ta thu được

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq \|\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^t S'(t-s)R_\lambda Pf(s)ds\| + \|\lim_{\lambda\to\infty} \int_t^{+\infty} S'(t-s)R_\lambda Qf(s)ds\| \\
&\leq \frac{2N}{1 - e^{-\delta T}} \int_0^T \|f(s)\|ds \\
&\leq \frac{2N}{1 - e^{-\delta T}} \int_0^T m(s)(\|v_n(s)\| + 1)ds \\
&\leq \frac{2N\ (n+1)}{1 - e^{-\delta T}} \int_0^T m(s)ds.
\end{aligned}$$

Do đó

$$n < \|z\|_{P_{TA}(\mathbb{R};X)} \leq \frac{2N\ (n+1)}{1 - e^{-\delta T}} \int_0^T m(s)ds.$$

Cho $n \to +\infty$, ta có

$$1 \leq \frac{2N}{1 - e^{-\delta T}} \int_0^T m(s)ds,$$

điều này mâu thuẫn so với (3.6). Vậy tồn tại một hình cầu đóng $B_R \in P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ thỏa mãn $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$.

Bước 2: Tiếp theo, ta sẽ xây dựng một tập D compact khác rỗng, lồi trong $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ thỏa mãn $\mathcal{F}(D) \subset D$.

Đặt $\mathcal{M}_0 = B_R$. Rõ ràng $\mathcal{M}_0$ là một tập con đóng của $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ và $\mathcal{F}(\mathcal{M}_0) \subset \mathcal{M}_0$. Đặt

$$\mathcal{M}_{k+1} = \overline{\text{co}}\mathcal{F}(\mathcal{M}_k), k = 0, 1, 2, ...$$

ở đây $\overline{\text{co}}$ là bao lồi đóng của một tập trong $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$. Ta thấy $\mathcal{M}_k$ là lồi, đóng và $\mathcal{M}_{k+1} \subset \mathcal{M}_k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Đặt $\mathcal{M} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k$, thì $\mathcal{M}$ là một tập con lồi, đóng trong $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ và $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Hơn nữa, từ $(\mathbf{F})(2)$ ta có với mỗi $k \geq 0, \mathcal{P}_F^{TA}(\mathcal{M}_k)$ là bị chặn tích phân. Do đó, $\mathcal{M}$ cũng là bị chặn tích phân.

Ta sẽ chứng minh $\mathcal{M}(t)$ là compact với mỗi t, tức là $\mu_k(t) = \chi(\mathcal{M}_k(t)) \to 0$ khi $k \to \infty$ với mỗi t.

Thật vậy, nếu $\{S'(t)\}$ compact thì ta có ngay $\mu_k(t) = 0, \forall t \geq 0$, do

$$\begin{aligned}
\mu_{k+1}(t) &= \chi(\mathcal{M}_{k+1}(t)) \\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty} \chi\left(\int_{-\infty}^{t} S'(t-s)PR_\lambda\mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)(s)ds\right) \\
&\quad + \lim_{\lambda\to\infty} \chi\left(\int_{t}^{+\infty} S'(t-s)QR_\lambda\mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)(s)ds\right) \\
&\leq 4 \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \chi\left(S'(t-s)PR_\lambda\mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)(s)\right) ds \\
&\quad + 4 \lim_{\lambda\to\infty} \int_{t}^{+\infty} \chi\left(S'(t-s)QR_\lambda\mathcal{P}_F(\mathcal{M}_k)(s)\right) ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ngược lại, nếu $\{S'(t)\}$ không compact thì

$$\begin{aligned}
\mu_{k+1}(t) &\leq 4 \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \chi\left(S'(t-s)PR_\lambda \mathcal{P}_F^{TA}(\mathcal{M}_k)(s)\right) ds \\
&\quad + 4 \lim_{\lambda\to\infty} \int_{t}^{+\infty} \chi\left(S'(t-s)QR_\lambda \mathcal{P}_F^{TA}(\mathcal{M}_k)(s)\right) ds \\
&\leq 4N \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \chi\left(\mathcal{P}_F^{TA}(\mathcal{M}_k)(s)\right) ds \\
&\quad + 4N \int_{t}^{+\infty} e^{\delta(t-s)} \chi\left(\mathcal{P}_F^{TA}(\mathcal{M}_k)(s)\right) ds \\
&\leq \frac{8N}{1-e^{-\delta T}} \int_{t-T}^{t} \chi(\mathcal{P}_F^{TA}(\mathcal{M}_k)(s)) ds,
\end{aligned}$$

do (1.2). Từ (**F**)(3), ta có

$$\mu_{k+1}(t) \leq \frac{8N}{1-e^{-\delta T}} \int_{t-T}^{t} k(s)\chi(\mathcal{M}_k(s)) ds,$$

Đặt $\mu_\infty(t) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(t)$, ta có

$$\mu_\infty(t) \leq \frac{8N}{1-e^{-\delta T}} \int_{t-T}^{t} k(s)\mu_\infty(s) ds.$$

Chọn $a \in \mathbb{R}$ sao cho $a < t - T$, khi đó

$$\mu_\infty(t) \leq \frac{8N}{1-e^{-\delta T}} \int_{a}^{t} k(s)\mu_\infty(s) ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall-Bellman ta thu được $\mu_\infty(t) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Từ đó, ta có tính compact của $\mathcal{M}(t)$.

Từ Mệnh đề 3.3, ta có $\mathcal{W}_1(\mathcal{M})$ và $\mathcal{W}_2(\mathcal{M})$ là các tập compact tương đối trong $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$. Điều này kéo theo $\mathcal{F}(M)$ cũng là tập compact tương đối. Đặt

$$D = \overline{\text{co}}\mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

Ta có D là một tập compact khác rỗng, lồi trong $P_{TA}(\mathbb{R}; X)$ và $\mathcal{F}(D) \subset D$ do $\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(\overline{\text{co}}\mathcal{F}(\mathcal{M})) \subset \mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \overline{\text{co}}\mathcal{F}(\mathcal{M}) = D$.

Bước 3: Xét $\mathcal{F} : D \to \mathcal{P}(D)$. Để áp dụng định lí điểm bất động trong Bổ đề 1.4, ta còn phải chứng minh rằng $\mathcal{F}$ có đồ thị đóng. Lấy $\{u_n\} \subset D$ với $u_n \to u^*$ và $v_n \in \mathcal{F}(u_n)$ mà $v_n \to v^*$. Ta có

$$v_n(t) \in (\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_2) \circ \mathcal{P}_F^{TA}(u_n)(t).$$

Lấy $f_n \in \mathcal{P}_F^{TA}(u_n)$ sao cho

$$v_n(t) = \mathcal{W}_1(f_n)(t) - \mathcal{W}_2(f_n)(t). \tag{3.7}$$

Từ $\mathcal{P}_F^{TA}$ là nửa liên tục trên yếu do Mệnh đề 3.1, áp dụng Bổ đề 1.3 ta thu được $f_n \rightharpoonup f^*$ trong $L^1(0,T;X)$ và $f^* \in \mathcal{P}_F^{TA}(u^*)$. Hơn nữa, đặt $K(t) = F(\overline{\{t, u_n(t)\}})$ thì $\{f_n(t)\} \subset K(t)$ với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$, trong đó $K(t)$ là compact trong X do $F(t,\cdot)$ là nửa liên tục trên. Lại từ $(\mathbf{F})(2)$, ta thấy $\{f_n\}$ là bị chặn tích phân. Do đó $\{f_n\}$ là một dãy nửa compact. Áp dụng Mệnh đề 2.2 ta thu được tính compact của $\{\mathcal{W}_1(f_n)\}$ và $\{\mathcal{W}_2(f_n)\}$ trong $P_{TA}(\mathbb{R};X)$. Từ đó, chuyển qua giới hạn trong (3.7) ta có $v^*(t) = \mathcal{W}_1(f^*)(t) - \mathcal{W}_2(f^*)(t)$ trong đó $f^* \in \mathcal{P}_F^{TA}(u^*)$. Tức là $v^* \in \mathcal{F}(u^*)$. Vậy định lí đã được chứng minh. □

3.3. ÁP DỤNG

3.3.1. Ví dụ 1

Xét Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên $\partial\Omega$ trơn. Xét bài toán

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta_x u(t,x) + \lambda u(t,x) = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{3.8}$$

$$f(t,x) \in [\tilde{f}_1(t,x,u(t,x))); \tilde{f}_2(t,x,u(t,x))], \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{3.9}$$

$$u(t+T,x) = -u(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{3.10}$$

$$u(t,x) = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \partial\Omega, \tag{3.11}$$

với Δ_x là toán tử Laplace theo biến x, $\lambda > 0$.

Tương tự như trong phần ứng dụng của Chương 2, ta xét

$$X = C(\overline{\Omega}),$$
$$X_0 = C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\},$$

với chuẩn $\|v\| = \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$ và định nghĩa

$$A_1 v = \Delta v,$$
$$v \in D(A_1) = \{v \in C_0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta v \in C_0(\overline{\Omega})\},$$

Đặt $A = A_1 - \lambda I$. Ta thấy rằng A sinh ra một nửa nhóm compact và giải tích $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ trên X_0 mà

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0.$$

Do vậy, (**A**) và (**F**)(3) thỏa mãn.
Xét $f_i : \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$, với $i = 1, 2$, xác định bởi

$$f_i(t, v)(x) = \tilde{f}_i(t, x, v(x)),$$

trong đó, các hàm $\tilde{f}_i : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

(H1) $\tilde{f}_i(\cdot, x, z)$ là đo được với mọi $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$; $\tilde{f}_i(t, \cdot, z)$ liên tục với mỗi $t, z \in \mathbb{R}$, và $\tilde{f}_i(t, x, \cdot)$ liên tục với mọi $t \in \mathbb{R}$ và $x \in \Omega$;

(H2) $|\tilde{f}_i(t, x, z)| \leq m(t)(|z| + 1)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$, trong đó $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$;

(H3) $\tilde{f}_i(t + T, x, -z) = -\tilde{f}_i(t, x, z)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$.

Khi đó, từ (H2), ta có

$$\begin{aligned}
\|f_i(t, v)\| &= \sup_{x\in\bar{\Omega}} |\tilde{f}_i(t, x, v(x))| \\
&\leq \sup_{x\in\bar{\Omega}} m(t)(|v(x)| + 1) \\
&\leq m(t)(\sup_{x\in\bar{\Omega}} |v(x)| + 1) = m(t)(\|v\| + 1).
\end{aligned}$$

Do đó, $(\mathbf{F})(2)$ thỏa mãn với $F(t,v) = [f_1(t,v); f_2(t,v)]$. Từ (H3), ta thấy rằng giả thiết $(\mathbf{F})(4)$ thỏa mãn. Hơn nữa, giả thiết $(\mathbf{F})(1)$ được thỏa mãn do (H1). Do đó, bài toán (3.8)-(3.11) có nghiệm $T-$đối tuần hoàn với điều kiện

$$\frac{2}{1-e^{-\lambda T}} \int_0^T m(s)ds < 1.$$

3.3.2. Ví dụ 2

Ta xét bài toán

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{k,l=1}^{M} \partial_k(a_{kl}(x)\partial_l)u(t,x) + a_0(x)u(t,x) + f(t,x),\ x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

$$f(t,x) \in [\tilde{f}_1(t,x,u(t,x))); \tilde{f}_2(t,x,u(t,x))], \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{3.13}$$

$$u(t+T,x) = -u(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{3.14}$$

$$\sum_{k,l=1}^{M} n_k(x)a_{kl}(x)\partial_l u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega. \tag{3.15}$$

Ở đây, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ là một miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 và $n(\cdot)$ là trường véctơ pháp tuyến đơn vị ngoài. Ta giả thiết các hệ số thỏa mãn:

$$a_{kl} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad k,l = 1,\cdots,M,\ a_0 \in C(\overline{\Omega}).$$

với $\sum\limits_{k,l=1}^{M} a_{kl}(x)v_k v_l \geq \eta|v|^2$, trong đó $\eta > 0, x \in \overline{\Omega}, v \in \mathbb{R}^M$.

Với $X = L^p(\Omega), 1 < p < \infty$, xét toán tử

$$A(x,D) := \sum_{k,l=1}^{M} \partial_k(a_{kl}(x)\partial_l) + a_0(x)$$

với miền xác định

$$D(A) = \left\{ f \in \bigcap_{p>1} W^{2,p}(\Omega) : A(\cdot,D)f \in C(\overline{\Omega}), \sum_{k,l=1}^{M} n_k(\cdot)a_{kl}(\cdot)\partial_l f = 0 \text{ trên } \partial\Omega \right\}.$$

Từ kết quả của Schnaubelt [68], ta có A sinh ra một nửa nhóm hyperbolic $T(\cdot)$ trên X với các hệ số M, λ, tức là tồn tại phép chiếu P và các hằng số $M, \lambda > 0$ sao cho $T(t)\ker P = \ker P$ và

$$\|T(t)x\| \leq Me^{-\lambda t}\|x\|, \quad \text{với } t \geq 0 \text{ và } x \in \mathrm{Rg}P,$$

$$\|T(t)x\| \geq \frac{1}{M}e^{\lambda t}\|x\|, \quad \text{với } t \geq 0 \text{ và } x \in \mathrm{Ker}P.$$

Do đó, giả thiết (**A**) thỏa mãn.

Xét $f_i : \mathbb{R} \times L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, với $i = 1, 2$, xác định như sau

$$f_i(t, v)(x) = \tilde{f}_i(t, x, v(x)),$$

với $\tilde{f}_i : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

(H4) $\tilde{f}_i(\cdot, \cdot, z)$ đo được với mỗi $z \in \mathbb{R}$ và $\tilde{f}_i(t, x, \cdot)$ liên tục với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$ và $x \in \Omega$;

(H5) $|\tilde{f}_i(t, x, z)| \leq \tilde{m}(t)(|z| + 1)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$, trong đó $\tilde{m} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$;

(H6) $|\tilde{f}_i(t, x, z) - \tilde{f}_i(t, x, z')| \leq k(t)|z - z'|$, với $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$,

(H7) $\tilde{f}_i(t + T, x, -z) = -\tilde{f}_i(t, x, z)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$.

Với $F(t, v) = [f_1(t, v); f_2(t, v)]$, ta thấy rằng các giả thiết (**F**)(1); (**F**)(4) thỏa mãn từ các điều kiện (H4); (H7) tương ứng.

Hơn nữa, từ (H5), ta có

$$\begin{aligned}
\|f_i(t, v)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \Big(\int_\Omega \tilde{m}(t)^p(|v(y)| + 1)^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \tilde{m}(t)\Big(\int_\Omega (|v(y)| + 1)^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \tilde{m}(t)(\|v\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}}).
\end{aligned}$$

Do đó, giả thiết (**F**)(2) thỏa mãn. Mặt khác,

$$\begin{aligned}\|f_i(t,v_1)-f_i(t,v_2)\|_{L^p(\Omega)} &= \Big(\int_\Omega |f_i(t,x,v_1(x))-f_i(t,x,v_2(x))|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \Big(\int_\Omega (k(t)|v_1(x)-v_2(x)|)^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le k(t)\|v_1-v_2\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Như vậy, từ Chú ý 3.1, ta có giả thiết (**F**)(3) thỏa mãn.

Từ đó, ta có kết quả sau đây về sự tồn tại nghiệm dựa trên Định lí 3.1.

Định lí 3.2. *Bài toán* (3.12)-(3.15) *có nghiệm T-đối tuần hoàn với điều kiện*

$$\frac{2N}{1-e^{-\lambda T}}\int_0^T \tilde{m}(s)ds < 1.$$

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi đã nghiên cứu lớp bao hàm thức vi phân có dạng đa diện mà trong đó, thành phần tuyến tính sinh ra một nửa nhóm tích phân. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho bài toán (Định lí 3.1).

2) Đưa ra hai ví dụ minh họa cho các kết quả trừu tượng đạt được (Mục 3.3).

Các kết quả trong chương này là sự mở rộng sang trường hợp bao hàm thức cho một số kết quả gần đây theo các tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm. Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Peron đa trị kết hợp với các kỹ thuật ước lượng, đánh giá độ đo không compact, chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho bài toán (3.1)-(3.2) dưới các điều kiện đã được giảm nhẹ hơn so với các kết quả đã biết. Và theo sự hiểu biết của tác giả, đây cũng là kết quả dạng bao hàm thức đầu tiên cho bài toán nghiệm đối tuần hoàn.

Chương 4

TÍNH ỔN ĐỊNH YẾU CỦA HỆ VI PHÂN BẬC PHÂN SỐ NỬA TUYẾN TÍNH

Trong chương này, dựa trên khái niệm ổn định tiệm cận yếu của Fillipov đưa ra cho bao hàm thức vi phân trong không gian hữu hạn chiều, chúng tôi đưa ra khái niệm ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường cho bao hàm thức tiến hóa bậc phân số, sau đó chứng minh tính ổn định yếu của bài toán với bao hàm thức vi phân bậc phân số có xung, điều kiện ban đầu không cục bộ và trễ hữu hạn.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo số 1 và 3 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Với $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach, xét bài toán

$$ {}^{C}D_0^{\alpha} u(t) \in Au(t) + F(t, u(t), u_t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{4.1} $$

$$ \Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \tag{4.2} $$

$$ u(s) + g(u)(s) = \varphi(s),\ s \in [-h, 0], \tag{4.3} $$

trong đó $D_0^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$, là đạo hàm bậc phân số theo nghĩa Caputo, A là một toán tử tuyến tính đóng trong X sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $W(\cdot)$, $F : \mathbb{R}^+ \times X \times C([-h, 0]; X) \to \mathcal{P}(X)$ là một ánh xạ đa trị, $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $k \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, I_k và g là các hàm sẽ được định nghĩa cụ thể trong mục sau. Ở đây, u_t là hàm trễ theo thời gian t, tức là $u_t(s) = u(t+s), s \in [-h, 0]$.

Để nghiên cứu tính ổn định cho lớp bài toán này, chúng tôi đưa ra khái

niệm sau đây về tính ổn định yếu của nghiệm không của bài toán (4.1)-(4.3): Ký hiệu $\Sigma(\varphi)$ là tập nghiệm của bài toán (4.1)-(4.3) ứng với điều kiện ban đầu φ sao cho $0 \in \Sigma(0)$. Nghiệm không của bài toán (4.1)-(4.3) được gọi là ổn định tiệm cận yếu nếu nó là

1) *ổn định*: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $\|\varphi\|_h < \delta$ thì $\|u_t\|_h < \epsilon$ với mọi $u \in \Sigma(\varphi)$ và $t > 0$, ở đây $\|\cdot\|_h$ ký hiệu chuẩn sup trong $C([-h, 0]; X)$;

2) *hút yếu*: với mọi $\varphi \in \mathcal{B}$, tồn tại $u \in \Sigma(\varphi)$ thỏa mãn $\|u_t\|_h \to 0$ khi $t \to +\infty$.

4.2. KHÔNG GIAN HÀM VÀ ĐỘ ĐO

Xét $\mathcal{E} = PC(J; X)$ là không gian các hàm xác định trên $J \subset \mathbb{R}$ và nhận giá trị trong X sao cho

- u liên tục trên $J \setminus \{t_k : k \in \Lambda\}$;
- tồn tại $u(t_k^+) = \lim\limits_{t \to t_k^+} u(t)$ và $u(t_k^-) = \lim\limits_{t \to t_k^-} u(t)$ sao cho $u(t_k^-) = u(t_k)$.

Nếu J là một khoảng compact, $PC(J; X)$ cùng với chuẩn

$$\|u\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|u(t)\|,$$

là một không gian Banach. Gọi χ_{PC} là độ đo Hausdorff trên $PC(J; X)$, ta có các tính chất sau (xem [40]): với mọi tập bị chặn $D \subset PC(J; X)$,

- $\sup_{t \in J} \chi(D(t)) \leq \chi_{PC}(D)$, với $D(t) = \{u(t) : d \in D\}$;
- Nếu D là tập đồng liên tục trên mỗi khoảng $(t_{k-1}, t_k] \subset J$ thì $\chi_{PC}(D) = \sup_{t \in J} \chi(D(t))$.

Trong trường hợp J là nửa trục, tức là $J = [-h, +\infty)$, ta xét không gian

$$PC_\varrho([-h, +\infty); X) = \{u \in PC([-h, +\infty); X) : \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{\varrho(t)} = 0\},$$

trong đó $\varrho : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty)$ là một hàm liên tục và không giảm. Ta có $PC_\varrho([-h, +\infty); X)$ cùng với chuẩn

$$\|u\|_\varrho = \sup_{t\in[-h,0]} \|u(t)\| + \sup_{t\geq 0} \frac{\|u(t)\|}{\varrho(t)},$$

là một không gian Banach. Tuy nhiên, trong trường hợp này, chúng ta không xác định và tính toán được độ đo Hausdorff trên PC_ϱ. Do đó, chúng ta phải xây dựng một độ đo mới có tính chất đơn điệu, không suy biến và chính quy trên không gian này.

Với $u \in PC_\varrho$, ký hiệu $\pi_T(u)$ là hạn chế của u trên $[-h, T]$, tức là $\pi_T(u) \in PC([-h, T]; X)$. Với $D \subset PC_\varrho$, đặt

$$\chi_\infty(D) = \sup_{T>0} \chi_{PC}(\pi_T(D)), \tag{4.4}$$

$$d_\infty(D) = \lim_{T\to+\infty} \sup_{u\in D} \sup_{t\geq T} \frac{\|u(t)\|}{\varrho(t)}, \tag{4.5}$$

$$\chi^*(D) = \chi_\infty(D) + d_\infty(D). \tag{4.6}$$

Ta thấy rằng $\chi_\infty(\cdot)$ và $d_\infty(\cdot)$ là các độ đo đơn điệu không suy biến, do đó $\chi^*(\cdot)$ cũng có các tính chất đó. Bây giờ ta chứng minh tính chính quy của $\chi^*(\cdot)$.

Bổ đề 4.1. *Nếu $\Omega \subset PC_\varrho([-h, +\infty); X)$ là một tập bị chặn thỏa mãn $\chi^*(\Omega) = 0$, thì Ω là tập compact tương đối.*

Chứng minh. Do $d_\infty(\Omega) = 0$, với $\epsilon > 0$ bất kỳ, ta có thể chọn $T > 0$ sao cho

$$\left\| \frac{u(t)}{\varrho(t)} \right\| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall t \geq T, \forall u \in \Omega. \tag{4.7}$$

Với $\{u_n\}$ là một dãy trong Ω, ta có $\chi_\infty(\{u_n\}) = 0$, do đó $\chi_{PC}(\pi_T(\{u_n\})) = 0$, tức là $\{u_n|_{[-h,T]}\}$ có một dãy con hội tụ trong $PC([-h, T]; X)$ (ta vẫn ký hiệu là n). Vậy, tồn tại $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\sup_{t\in[-h,0]} \|u_n(t) - u_m(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_m(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall n, m \geq N(\epsilon).$$

Như vậy,

$$\sup_{t\in[-h,0]} \|u_n(t) - u_m(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{u_n(t)}{\varrho(t)} - \frac{u_m(t)}{\varrho(t)} \right\| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall n, m \geq N(\epsilon). \quad (4.8)$$

Kết hợp (4.7)-(4.8), ta có

$$\begin{aligned}
&\|u_n - u_m\|_\varrho = \sup_{t\in[-h,0]} \|u_n(t) - u_m(t)\| + \sup_{t\geq 0} \left\| \frac{u_n(t)}{\varrho(t)} - \frac{u_m(t)}{\varrho(t)} \right\| \\
&\leq \sup_{t\in[-h,0]} \|u_n(t) - u_m(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{u_n(t)}{\varrho(t)} - \frac{u_m(t)}{\varrho(t)} \right\| + \sup_{t\geq T} \left\| \frac{u_n(t)}{\varrho(t)} - \frac{u_m(t)}{\varrho(t)} \right\| \\
&\leq \sup_{t\in[-h,0]} \|u_n(t) - u_m(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{u_n(t)}{\varrho(t)} - \frac{u_m(t)}{\varrho(t)} \right\| + \sup_{t\geq T} \left\| \frac{u_n(t)}{\varrho(t)} \right\| \\
&\qquad + \sup_{t\geq T} \left\| \frac{u_m(t)}{\varrho(t)} \right\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,
\end{aligned}$$

với mọi $n, m \geq N(\epsilon)$. Do đó $\{u_n\}$ là dãy Cauchy trong $PC_\varrho([-h, +\infty); X)$. Ta có điều phải chứng minh. □

Gọi $\Phi(t, s)$ là một họ các toán tử tuyến tính bị chặn trên X với $t, s \in [0, T], s \leq t$. Kết quả sau đây đã được chứng minh trong [67, Bổ đề 1].

Mệnh đề 4.1. *Giả thiết rằng Φ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(Φ1) *tồn tại một hàm $\rho \in L^q(0, T), q > 1$ sao cho $\|\Phi(t, s)\| \leq \rho(t - s)$ với mọi $t, s \in [0, T], s \leq t$;*

(Φ2) *$\|\Phi(t, s) - \Phi(r, s)\| \leq \epsilon$ với $0 \leq s \leq r - \epsilon, r < t = r + h \leq T$, trong đó $\epsilon = \epsilon(h) \to 0$ khi $h \to 0$.*

Khi đó, toán tử $\mathbf{S} : L^{q'}(0, T; X) \to C([0, T]; X)$ được định nghĩa bởi

$$(\mathbf{S}g)(t) := \int_0^t \Phi(t, s)g(s)ds$$

biến mỗi tập bị chặn thành một tập liên tục đồng bậc, trong đó q' là số mũ liên hợp của q, tức là $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Với $p > \frac{1}{\alpha}$, ta xác định toán tử tuyến tính

$$Q_\alpha : L^p(0,T;X) \to C([0,T];X),$$
$$Q_\alpha(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s) ds. \tag{4.9}$$

Mệnh đề 4.2. *Giả sử nửa nhóm $W(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn. Khi đó:*

1) Với mỗi tập bị chặn $\Omega \subset L^p(0,T;X)$, $Q_\alpha(\Omega)$ là một tập liên tục đồng bậc trong $C([0,T];X)$. Hơn nữa, ta có ước lượng sau

$$\chi_{PC}(Q_\alpha(\Omega)) \le 4 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi(\Omega(s)) ds.$$

2) Nếu $\{f_n\} \subset L^p(0,T;X)$ là một dãy nửa compact, tức là $\{f_n(t) : n \ge 1\} \subset K(t)$ với $K(t)$ là họ các tập compact, và $\|f_n(t)\| \le \nu(t)$ với hầu khắp $t \in [0,T]$ với $\nu \in L^p(0,T)$, thì $\{Q_\alpha(f_n)\}$ là compact tương đối trong $C([0,T];X)$. Hơn nữa, nếu $f_n \rightharpoonup f$ trong $L^p(0,T;X)$ thì $Q_\alpha(f_n) \to Q_\alpha(f)$ trong $C([0,T];X)$.

Chứng minh. (1) Do $W(\cdot)$ là liên tục theo chuẩn, ta có $P_\alpha(\cdot)$ cũng liên tục theo chuẩn (xem [78]). Vậy $\Phi(t,s) = (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)$ thỏa mãn $(\Phi1)-(\Phi2)$ trong Mệnh đề 4.1. Do đó, chúng ta có tính liên tục đồng bậc của $Q_\alpha(\Omega)$. Khi đó

$$\chi_{PC}(Q_\alpha(\Omega)) = \sup_{t\in[0,T]} \chi(Q_\alpha(\Omega)(t)).$$

Áp dụng Mệnh đề 1.5, ta có

$$\begin{aligned}
\chi_{PC}(Q_\alpha(\Omega)) &= \sup_{t\in[0,T]} \chi\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)\Omega(s) ds\right) \\
&\le 4 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \chi\left((t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)\Omega(s)\right) ds \\
&\le 4 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi\left(\Omega(s)\right) ds.
\end{aligned}$$

(2) Từ chứng minh trên, dãy $\{Q_\alpha(f_n)\}$ là liên tục đồng bậc. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}\chi\left(\{Q_\alpha(f_n)(t)\}\right) &= \chi\left(\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f_n(s)ds\right\}\right)\\ &\le 4\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi\left(\{f_n(s)\}\right)ds\\ &= 0,\end{aligned}$$

do Mệnh đề 1.5. Như vậy $\{Q_\alpha(f_n)(t)\}$ là một tập tiền compact, với mỗi $t \in [0,T]$. Áp dụng Định lí Arzelà-Ascoli, $\{Q_\alpha(f_n)\}$ là tiền compact trong $C([0,T];X)$.

Khẳng định cuối cùng được chứng minh như sau. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có $Q_\alpha : L^p(0,T;X) \to C([0,T];X)$ là bị chặn, suy ra nó liên tục. Do đó, nó liên tục theo tôpô yếu (xem [15, Định lí 3.10]), tức là $Q_\alpha(f_n) \rightharpoonup Q_\alpha(f)$ trong $C([0,T];X)$. Từ tính tiền compact của $\{Q_\alpha(f_n)\}$, ta có sự hội tụ này là mạnh trong $C([0,T];X)$. Định lí được chứng minh. □

4.3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TRÊN NỬA TRỤC

Trong mục này, ta xét $\varrho(t) = e^{\delta t}$ với $\delta > 0$. Với bài toán (4.1)-(4.3), xét các giả thiết:

*(**A**) C_0-nửa nhóm $\{W(t)\}_{t\ge 0}$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn và bị chặn toàn cục, tức là*

$$\|W(t)x\| \le M_A\|x\|, \forall t \ge 0, x \in X.$$

*(**F**) Thành phần phi tuyến $F : \mathbb{R}^+ \times X \times C([-h,0];X) \to \mathcal{P}(X)$ thỏa mãn:*

1) ánh xạ đa trị $(v,w) \mapsto F(t,v,w)$ là nửa liên tục trên với mỗi $t \in \mathbb{R}^+$;

2) ánh xạ đa trị $t \mapsto F(t,u(t),u_t)$ có hàm chọn đo được mạnh với mỗi $u \in PC_\varrho$;

3) tồn tại hàm $m \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ thỏa mãn

$$\|F(t,v,w)\| = \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(t,v,w)\} \le m(t)(\|v\| + \|w\|_h),$$

với mọi $(t, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times X \times C([-h, 0]; X)$*;*

4) nếu $W(\cdot)$ *không compact, tồn tại* $k \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ *sao cho*

$$\chi(F(t, V, W)) \leq k(t) \left[\chi(V) + \sup_{t \in [-h,0]} \chi(W(t)) \right],$$

với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$*, và mọi tập bị chặn* $V \subset X, W \subset C([-h, 0]; X)$*.*

*(**G**) Hàm* $g : PC_\varrho \to C([-h, 0]; X)$ *liên tục và thỏa mãn*

1) $\|g(u)\|_h \leq \Psi_g(\|u\|_\varrho)$ *với mọi* $u \in PC_\varrho$*, trong đó* Ψ_g *là một hàm thực xác định trên* $\mathbb{R}^+$*;*

2) tồn tại số không âm η *thỏa mãn* $\chi_h(g(D)) \leq \eta \cdot \chi_\infty(D)$ *với mọi tập bị chặn* $D \subset PC_\varrho$*, trong đó* χ_h *là độ đo Hausdorff trong* $C([-h, 0]; X)$*.*

*(**I**) Hàm* $I_k : X \to X, k \in \Lambda$*, liên tục và thỏa mãn:*

1) tồn tại dãy số thực không âm $\{l_k\}_{k \in \Lambda}$ *sao cho* $\sum_{k \in \Lambda} l_k < \infty$ *và*

$$\|I_k(x)\| \leq l_k \|x\|, \text{ với mọi } x \in X, k \in \Lambda.$$

2) Tồn tại dãy số thực không âm $\{\mu_k\}_{k \in \Lambda}$ *sao cho*

$$\chi(I_k(B)) \leq \mu_k \chi(B),$$

với mọi tập bị chặn $B \subset X$*;*

3) Dãy $\{t_k : k \in \Lambda\}$ *thỏa mãn* $\inf_{k \in \Lambda}(t_{k+1} - t_k) > 0$*.*

Với $u \in PC_\varrho$, đặt

$$\mathcal{P}^p_F(u) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+; X) : f(t) \in F(t, u(t), u_t) \text{ hầu khắp } t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Định nghĩa 4.1. Hàm $u : [-h, +\infty) \to X$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) nếu $u(t) + g(u)(t) = \varphi(t)$ với $t \in [-h, 0]$, và tồn tại

$f \in \mathcal{P}_F^p(u)$ sao cho

$$u(t) = S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k)) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f(s)ds,$$

với $t > 0$.

Với $\varphi \in C([-h,0];X)$ cho trước, đặt $\mathcal{F} : PC_\varrho \to \mathcal{P}(PC_\varrho)$ là ánh xạ đa trị xác định bởi

$$\mathcal{F}(u)(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(u)(t), \qquad t \in [-h,0], \\ S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k)) \\ \qquad\qquad + \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F^p(u) \right\}, t > 0. \end{cases}$$

Khi đó, u là một nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) nếu và chỉ nếu nó là một điểm bất động của *toán tử nghiệm* $\mathcal{F}$.

Đầu tiên, để kiểm tra tính đóng của $\mathcal{F}$, ta chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 4.2. *Giả sử rằng (**F**) thỏa mãn. Nếu $\{v_n\} \subset PC_\varrho$ với $v_n \to v^*$ và $f_n \in \mathcal{P}_F^p(v_n)$ thì $f_n \rightharpoonup f^*$ trong $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;X)$ với $f^* \in \mathcal{P}_F^p(v^*)$.*

Chứng minh. Xét $\{v_n\} \subset PC_\varrho$ mà $v_n \to v^*, f_n \in \mathcal{P}_F^p(v_n)$. Ta có $\{f_n(t)\} \subset C(t) := \overline{F(t, \{v_n(t), (v_n)_t\})}$, là một tập compact với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$, do giả thiết (**F**)(1). Với $T > 0$ cho trước, từ giả thiết **(F)**(3), ta có $\{f_n|_{[0,T]}\}$ bị chặn bởi một hàm L^p-khả tích. Theo [33, Hệ quả 3.3], $\{f_n\}$ là tập compact yếu trong $L^p(0,T;X)$. Do đó, có thể giả sử $f_n \rightharpoonup f^{1*} \in L^p(0,T;X)$. Áp dụng Bổ đề Mazur (xem [15]), tồn tại dãy $\tilde{f}_n \in co\{f_i : i \geq n\}$ sao cho $\tilde{f}_n \to f^{1*}$ trong $L^p(0,T;X)$. Vì vậy $\tilde{f}_n(t) \to f^{1*}(t)$ hầu khắp $t \in [0,T]$. Do F nhận giá trị compact và $F(t,\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục trên, ta có với $\epsilon > 0$

$$F(t, v_n(t), (v_n)_t) \subset F(t, v^*(t), v_t^*) + B_\epsilon$$

với mọi n đủ lớn, ở đây B_ϵ là hình cầu trong X có tâm ở gốc tọa độ và bán kính ϵ. Vậy

$$f_n(t) \in F(t, v^*(t), v_t^*) + B_\epsilon, \text{ hầu khắp } t \in [0, T].$$

Do tính lồi của $F(t, v^*(t), v_t^*) + B_\epsilon$, bao hàm thức trên vẫn đúng khi thay $f_n(t)$ bởi $\tilde{f}_n(t)$. Vậy, $f^{1*}(t) \in F(t, v^*(t), v_t^*) + B_\epsilon$ với hầu khắp $t \in [0, T]$. Do ϵ là bất kỳ, ta thu được $f^{1*}(t) \in F(t, v^*(t), v_t^*)$ với hầu khắp $t \in [0, T]$.

Lặp lại lí luận ở trên cho $t \in [(j-1)T, jT], j = 1, 2, ...$ ta có $f_n \rightharpoonup f^{j*}$ trong $L^p((j-1)T, jT; X)$ với $f^{j*}(t) \in F(t, v^*(t), v_t^*)$ với hầu khắp $t \in [(j-1)T, jT]$. Ta xác định $f^* \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ như sau

$$f^*(t) = f^{j*}(t) \text{ nếu } t \in [(j-1)T, jT],$$

ta có được điều phải chứng minh. □

Bây giờ, ta sẽ chứng minh tính đóng của toán tử nghiệm.

Bổ đề 4.3. *Giả sử rằng (**A**), (**F**), (**G**) và (**I**) thỏa mãn. Khi đó, toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ là đóng.*

Chứng minh. Xét $\{v_n\} \subset PC_\varrho$ là một dãy hội tụ tới v^* và $z_n \in \mathcal{F}(v_n)$ sao cho $z_n \to z^*$. Ta sẽ chứng minh $z^* \in \mathcal{F}(v^*)$. Từ định nghĩa của $\mathcal{F}$, ta lấy $f_n \in \mathcal{P}^p_F(v_n)$ sao cho

$$z_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(v_n)(t), \ t \in [-h, 0], \\ S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(v_n)(0)] + \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t - t_k) I_k(v_n(t_k)) \\ \qquad\qquad + Q_\alpha(f_n)(t), \ t > 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

trong đó Q_α đã được định nghĩa trong (4.9). Từ Bổ đề 4.2, $f_n \rightharpoonup f^*$ trong

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ với $f^* \in \mathcal{P}^p_F(v^*)$. Ta sẽ chứng minh

$$z^*(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(v^*)(t),\ t \in [-h, 0], \\ S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(v^*)(0)] + \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t - t_k) I_k(v^*(t_k)) \\ \qquad\qquad + Q_\alpha(f^*)(t),\ t > 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Với $t \in [-h, 0]$, do g liên tục, ta có ngay điều cần chứng minh. Với $t > 0$, lấy $T > 0$ sao cho $t \leq T$, lí luận tương tự như trong chứng minh Bổ đề 4.2, ta có dãy $\{f_n|_{[0,T]}\}$ là nửa compact. Áp dụng Mệnh đề 4.2, $Q_\alpha(f_n) \to Q_\alpha(f^*)$ trong $C([0, T]; X)$ và $Q_\alpha(f_n)(t) \to Q_\alpha(f^*)(t)$ trong X. Do tính liên tục của g và I_k, chuyển qua giới hạn trong (4.10) ta thu được (4.11). Định lí được chứng minh. □

Từ đây, ta sẽ chứng minh tính nén của toán tử nghiệm.

Bổ đề 4.4. *Giả thiết như trong Bổ đề 4.3. Nếu*

$$\ell := \eta M_A + M_A \sum_{k \in \Lambda} \mu_k + 8 \sup_{t \geq 0} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} \|P_\alpha(t - s)\|_\chi k(s) ds < \infty, \tag{4.12}$$

ta có

$$\chi_\infty(\mathcal{F}(D)) \leq \ell \cdot \chi_\infty(D),$$

với mọi tập bị chặn $D \subset PC_\varrho$.

Chứng minh. Xét $D \subset PC_\varrho$ là một tập bị chặn. Với $v \in D$, ta biểu diễn

$\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}_1(v) + \mathcal{F}_2(v) + \mathcal{F}_3(v)$, trong đó

$$\mathcal{F}_1(v)(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(v)(0)], & t > 0, \\ \varphi(t) - g(v)(t), & t \in [-h, 0]; \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_2(v)(t) = \begin{cases} \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t - t_k) I_k(v(t_k)), & t > 0, \\ 0, & t \in [-h, 0]; \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_3(v)(t) = \begin{cases} Q_\alpha \circ \mathcal{P}_F^p(v)(t), & t > 0, \\ 0, & t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Từ tính chất nửa cộng tính đại số của χ_∞, ta có

$$\chi_\infty(\mathcal{F}(D)) \leq \chi_\infty(\mathcal{F}_1(D)) + \chi_\infty(\mathcal{F}_2(D)) + \chi_\infty(\mathcal{F}_3(D)).$$

Với $z_1, z_2 \in \mathcal{F}_1(D)$, tồn tại $u_1, u_2 \in D$ để

$$z_1(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u_1)(0)], & t \geq 0, \\ \varphi(t) - g(u_1)(t), & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

$$z_2(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u_2)(0)], & t \geq 0, \\ \varphi(t) - g(u_2)(t), & t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Do đó

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| \leq \begin{cases} \|S_\alpha(t)\| \|g(u_1) - g(u_2)\|_h, & t \geq 0, \\ \|g(u_1) - g(u_2)\|_h, & t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Ta thu được

$$||z_1 - z_2||_\rho \leq M_A \|g(u_1) - g(u_2)\|_h.$$

Vậy

$$\chi_{\mathcal{PC}}(\mathcal{F}_1(D)) \leq M_A \chi_h(g(D)).$$

Áp dụng **(G)**(2), ta có

$$\chi_\infty(\mathcal{F}_1(D)) \leq \eta M_A\, \chi_\infty(D). \tag{4.13}$$

Bây giờ, ta xét $z_1, z_2 \in \mathcal{F}_2(D)$, khi đó tồn tại $u_1, u_2 \in D$ thỏa mãn

$$z_1(t) - z_2(t) = \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)[I_k(u_1(t_k)) - I_k(u_2(t_k))].$$

Do đó

$$||z_1 - z_2||_\rho \leq M_A \sum_{k\in\Lambda} ||I_k(u_1(t_k)) - I_k(u_2(t_k))||.$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\chi_\infty(\mathcal{F}_2(D)) &\leq M_A \sum_{k\in\Lambda} \chi(I_k(D(t_k))) \\
&\leq M_A \sum_{k\in\Lambda} \mu_k \chi(D(t_k)) \\
&\leq \Big(M_A \sum_{k\in\Lambda} \mu_k\Big)\chi_\infty(D),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

do giả thiết (**I**)(2).

Xét $\mathcal{F}_3(D)$, ta có $\Omega = \mathcal{P}_F^p(D)|_{[0,T]}$ bị chặn $L^p(0,T;X)$, do đó

$$\pi_T(\mathcal{F}_3(D)) = Q_\alpha(\Omega),$$

và ta có đánh giá

$$\chi_{PC}(\pi_T(\mathcal{F}_3(D))) \leq 4 \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi(\Omega(s))ds, \tag{4.15}$$

do Mệnh đề 4.2. Từ (**F**)(4), ta có

$$\begin{aligned}
\chi(\Omega(s)) &\leq \chi(F(s, D(s), D_s)) \\
&\leq k(s)[\chi(D(s)) + \sup_{r\in[-h,0]} \chi(D(s+r))] \\
&\leq 2k(s)\chi_{PC}(\pi_T(D)).
\end{aligned}$$

Thế vào (4.15), ta thu được

$$\begin{aligned}&\chi_{PC}(\pi_T(\mathcal{F}_3(D)))\\&\quad\leq\left(8\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|_\chi k(s)ds\right)\chi_{PC}(\pi_T(D)).\end{aligned}$$

Do đó

$$\chi_\infty(\mathcal{F}_3(D))\leq\left(8\sup_{t\geq 0}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|_\chi k(s)ds\right)\chi_\infty(D). \tag{4.16}$$

Kết hợp (4.13)-(4.14) và (4.16), ta thu được

$$\chi_\infty(\mathcal{F}(D))\leq\ell\cdot\chi_\infty(D), \tag{4.17}$$

trong đó ℓ được xác định bởi (4.12). Định lí được chứng minh. □

Bổ đề 4.5. *Giả thiết như trong Bổ đề 4.3. Giả sử*

$$\vartheta:=\sup_{t>0}\int_0^{\sigma t}\frac{\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)}m(s)ds<\infty, \tag{4.18}$$

$$\kappa:=\sup_{t>0}\int_{\sigma t}^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)}m(s)ds<\infty, \tag{4.19}$$

với $\sigma\in(0,1)$, *khi đó*

$$d_\infty(\mathcal{F}(D))\leq 2\kappa\cdot d_\infty(D), \tag{4.20}$$

với mọi tập bị chặn $D\subset PC_\varrho$.

Chứng minh. Xét $D\subset PC_\varrho$ là một tập bị chặn. Sử dụng phân tích $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2+\mathcal{F}_3$ như trong chứng minh Bổ đề 4.4, ta sẽ chứng minh

$$d_\infty(\mathcal{F}_1(D))=d_\infty(\mathcal{F}_2(D))=0.$$

Với $\epsilon>0$ cho trước, ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại $T>0$ sao cho

$$\frac{\|\mathcal{F}_i(v)(t)\|}{\varrho(t)}<\epsilon,\ \forall t\geq T, v\in D, i=1,2.$$

Chọn $R > 0$ thỏa mãn $\sup\{\|v\|_\varrho : v \in D\} \leq R$, ta có, với $t > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\|\mathcal{F}_1(v)(t)\|}{\varrho(t)} &\leq \frac{\|S_\alpha(t)\|}{\varrho(t)}(\|\varphi\|_h + \|g(v)\|_h)\\ &\leq \frac{M_A}{\varrho(t)}(\|\varphi\|_h + \Psi_g(\|v\|_\varrho))\\ &\leq \frac{\|S_\alpha(t)\|}{\varrho(t)}(\|\varphi\|_h + \Psi_g(R))\\ &< \epsilon, \text{ for all } t \geq T_1, \ \forall v \in D,\end{aligned}$$

do $\frac{\|S_\alpha(t)\|}{\varrho(t)} \to 0$ khi $t \to +\infty$.

Xét $\mathcal{F}_2$, chọn $N_0 \in \Lambda$ sao cho

$$RM_A \sum_{k>N_0} l_k < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.21}$$

Chọn $T_2 > 0$ thỏa mãn

$$\frac{\|S_\alpha(t)\|}{\varrho(t)} R \sum_{k\leq N_0} l_k < \frac{\epsilon}{2}, \forall t \geq T_2. \tag{4.22}$$

Khi đó với mỗi $v \in D$, từ $(\mathbf{I})(2)$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{\|\mathcal{F}_2(v)(t)\|}{\varrho(t)} &\leq \frac{1}{\varrho(t)} \sum_{k\in\Lambda} \|S_\alpha(t-t_k)\|\|I_k(v(t_k))\|\\ &\leq \frac{1}{\varrho(t)} \sum_{k\in\Lambda} \|S_\alpha(t-t_k)\| l_k \|v(t_k)\|\\ &\leq \frac{R}{\varrho(t)} \sum_{k\leq N_0} \|S_\alpha(t-t_k)\| l_k + \frac{RM_A}{\varrho(t)} \sum_{k>N_0} l_k\\ &\leq R \sum_{k\leq N_0} \frac{\|S_\alpha(t-t_k)\|}{\varrho(t-t_k)} l_k + RM_A \sum_{k>N_0} l_k\\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall t \geq T_2 + t_{N_0}.\end{aligned}$$

do (4.21)-(4.22) và $\varrho(\cdot)$ là không giảm, $\varrho(t) \geq 1, \forall t \geq 0$.

Bây giờ, ta sẽ đánh giá $d_\infty(\mathcal{F}_3(D))$. Lấy $z \in \mathcal{F}_3(v), v \in D$. Chọn $f \in \mathcal{P}_F^p(v)$ sao cho

$$z(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s) ds, t > 0,$$

ta có

$$\begin{aligned}\frac{\|z(t)\|}{\varrho(t)} &\le \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)}\frac{\|f(s)\|}{\varrho(s)}ds \\ &\le \left(\int_0^{\sigma t}+\int_{\sigma t}^t\right)\Theta(t,s)ds, \qquad (4.23)\end{aligned}$$

trong đó

$$\Theta(t,s)=\frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|m(s)}{\varrho(t-s)}\frac{\|v(s)\|+\|v_s\|_h}{\varrho(s)},$$

do (**G**)(1) và (**F**)(3). Lấy $t>0$ sao cho $\sigma t-h>0$. Ta có, với $s\in[0,\sigma t]$,

$$\begin{aligned}\frac{\|v(s)\|+\|v_s\|_h}{\varrho(s)} &= \frac{1}{\varrho(s)}(\|v(s)\|+\sup_{\tau\in[-h,0]}\|v(s+\tau)\|) \\ &\le \frac{1}{\varrho(s)}(\|v(s)\|+\sup_{\tau\in[-h,0]}\|v(\tau)\|+\sup_{\tau\in[0,s]}\|v(\tau)\|) \\ &\le \sup_{\tau\in[-h,0]}\|v(\tau)\|+\frac{1}{\varrho(s)}(\|v(s)\|+\sup_{\tau\in[0,s]}\|v(\tau)\|) \\ &\le \sup_{\tau\in[-h,0]}\|v(\tau)\|+\frac{\|v(s)\|}{\varrho(s)}+\sup_{\tau\in[0,s]}\frac{\|v(\tau)\|}{\varrho(\tau)} \\ &\le 2R.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma t}\Theta(t,s)ds &\le 2R\int_0^{\sigma t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)}m(s)ds \\ &\le \frac{2R}{[(1-\sigma)t]^{1-\alpha}}\int_0^{\sigma t}\frac{\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)}m(s)ds \\ &\le \frac{2R\vartheta}{[(1-\sigma)t]^{1-\alpha}}, \qquad (4.24)\end{aligned}$$

trong đó ϑ được cho trong (4.18). Mặt khác, với $s\ge\sigma t$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{\|v(s)\|+\|v_s\|_h}{\varrho(s)} &= \frac{1}{\varrho(s)}(\|v(s)\|+\sup_{\tau\in[-h,0]}\|v(s+\tau)\|) \\ &\le \frac{\|v(s)\|}{\varrho(s)}+\sup_{\tau\in[-h,0]}\frac{\|v(s+\tau)\|}{\varrho(s+\tau)} \\ &\le \sup_{r\ge\sigma t}\frac{\|v(r)\|}{\varrho(r)}+\sup_{r\ge\sigma t-h}\frac{\|v(r)\|}{\varrho(r)}\le 2\sup_{r\ge\sigma t-h}\frac{\|v(r)\|}{\varrho(r)}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\int_{\sigma t}^{t} \Theta(t,s)ds \leq \left(\int_{\sigma t}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)} m(s)ds \right) 2 \sup_{r \geq \sigma t - h} \frac{\|v(r)\|}{\varrho(r)}$$
$$\leq 2\kappa \sup_{r \geq \sigma t - h} \frac{\|v(r)\|}{\varrho(r)}, \tag{4.25}$$

trong đó κ được định nghĩa trong (4.19). Áp dụng các đánh giá (4.24)-(4.25) vào (4.23), ta có

$$\frac{\|z(t)\|}{\varrho(t)} \leq \frac{2R\vartheta}{[(1-\sigma)t]^{1-\alpha}} + 2\kappa \sup_{r \geq \sigma t - h} \frac{\|v(r)\|}{\varrho(r)},$$

với mọi $t > \frac{h}{\sigma}$, $v \in D, z \in \mathcal{F}_3(v)$. Từ bất đẳng thức cuối suy ra

$$d_\infty(\mathcal{F}_3(D)) \leq 2\kappa \cdot d_\infty(D).$$

Bổ đề được chứng minh. □

Kết hợp các Bổ đề 4.4 và 4.5, ta thu được bổ đề sau.

Bổ đề 4.6. *Giả sử rằng (**A**), (**F**), (**G**) và (**I**) thỏa mãn. Khi đó, toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ là χ^*-nén với điều kiện*

$$\ell = \eta M_A + M_A \sum_{k \in \Lambda} \mu_k + 8 \sup_{t \geq 0} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\|_\chi k(s)ds < 1, \tag{4.26}$$

$$\vartheta = \sup_{t>0} \int_0^{\sigma t} \frac{\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)} m(s)ds < \infty, \tag{4.27}$$

$$\kappa = \sup_{t>0} \int_{\sigma t}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)} m(s)ds < \frac{1}{2}, \tag{4.28}$$

với $\sigma \in (0,1)$.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 4.4 và 4.5, với mọi tập bị chặn $D \subset PC_\varrho$, ta có

$$\chi_\infty(\mathcal{F}(D)) + d_\infty(\mathcal{F}(D)) \leq \max\{\ell, 2\kappa\} \cdot (\chi_\infty(D) + d_\infty(D)).$$

Vậy

$$\chi^*(\mathcal{F}(D)) \leq \max\{\ell, 2\kappa\} \cdot \chi^*(D).$$

Nếu $\chi^*(\mathcal{F}(D)) \geq \chi^*(D)$ thì $\chi^*(D) \leq \max\{\ell, 2\kappa\} \cdot \chi^*(D)$, như vậy $\chi^*(D) = 0$ do $\max\{\ell, 2\kappa\} < 1$. Khi đó D là tập compact tương đối. □

Định lí 4.1. *Giả thiết như trong Bổ đề 4.6. Giả sử*

$$\begin{aligned}(1+M_A)\liminf_{r\to+\infty}\frac{\Psi_g(r)}{r} + M_A\sum_{k\in\Lambda} l_k \\ + 2\sup_{t>0}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|m(s)}{\varrho(t-s)}ds < 1,\end{aligned} \tag{4.29}$$

khi đó, bài toán (4.1)-(4.3) *có ít nhất một nghiệm tích phân trong* PC_ϱ.

Chứng minh. Từ Bổ đề 4.3, ta có $\mathcal{F}$ là đóng. Hơn nữa, $\mathcal{F}$ là χ^*-nén do Bổ đề 4.6. Ngoài ra, $\mathcal{F}$ nhận giá trị compact. Thật vậy, với $v \in PC_\varrho$, ta có

$$\chi^*(\mathcal{F}(v)) \leq \max\{\ell, \kappa\} \cdot \chi^*(\{v\}) = 0.$$

Tức là $\chi^*(\mathcal{F}(v)) = 0$ và do đó $\mathcal{F}(v)$ là tập tiền compact do Bổ đề 4.1. Từ tính đóng của $\mathcal{F}$, ta có $\mathcal{F}(v)$ là compact.

Để áp dụng Định lí 1.5, ta còn phải chứng minh rằng tồn tại $R > 0$ sao cho

$$\mathcal{F}(\mathbf{B}_R) \subset \mathbf{B}_R,$$

trong đó $\mathbf{B}_R$ là hình cầu trong PC_ϱ, tâm tại gốc tọa độ, bán kính R.

Đầu tiên, ta sẽ kiểm tra $\mathcal{F}(PC_\varrho) \subset PC_\varrho$. Lấy $v \in PC_\varrho$, thì $d_\infty(\{v\}) = 0$. Sử dụng (4.20), ta có $d_\infty(\mathcal{F}(v)) = 0$. Từ đó ta có $\mathcal{F}(v) \subset PC_\varrho$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh tồn tại $R > 0$ thỏa mãn $\mathcal{F}(\mathbf{B}_R) \subset \mathbf{B}_R$. Giả sử ngược lại, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $v_n \in \mathbf{B}_n$ và $z_n \in \mathcal{F}(v_n)$ sao cho $\|z_n\|_\varrho > n$. Chọn $f_n \in \mathcal{P}_F^p(v_n)$ thỏa mãn

$$z_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(v_n)(t), t \in [-h, 0], \\ S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(v_n)(0)] + \sum\limits_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)I_k(v_n(t_k)) \\ \qquad\qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f_n(s)ds, t > 0, \end{cases}$$

ta thu được, với mọi $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\|z_n(t)\|}{\varrho(t)} \leq & \frac{\|S_\alpha(t)\|}{\varrho(t)}[\|\varphi\|_h + \Psi_g(\|v_n\|_\varrho)] + \sum_{0<t_k<t} \frac{\|S_\alpha(t-t_k)\|}{\varrho(t-t_k)} \frac{\|v_n(t_k)\|}{\varrho(t_k)} l_k \\ & + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)} \frac{\|v_n(s)\| + \|(v_n)_s\|_h}{\varrho(s)} m(s)ds,\end{aligned}$$

nhờ các giả thiết (**G**)(1), (**I**)(2) và (**F**)(3). Do

$$\begin{aligned}\frac{\|S_\alpha(t)\|}{\varrho(t)} &\leq M_A, \ \forall t \geq 0, \\ \frac{\|v_n(s)\|}{\varrho(s)} &\leq n, \ \forall s \geq 0, \\ \frac{\|(v_n)_s\|_h}{\varrho(s)} &\leq \frac{1}{\varrho(s)} \sup_{\tau\in[-h,0]} \|v_n(s+\tau)\| \\ &\leq \sup_{\tau\in[-h,0]} \frac{1}{\varrho(s+\tau)} \|v_n(s+\tau)\| \\ &\leq \|v_n\|_\varrho \leq n,\end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned}\frac{\|z_n(t)\|}{\varrho(t)} \leq & M_A(\|\varphi\|_h + \Psi_g(n)) + nM_A \sum_{k\in\Lambda} l_k \\ & + 2n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)} m(s)ds.\end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}1 < \frac{\|z_n\|_\varrho}{n} &= \frac{1}{n}\left(\|z_n\|_h + \sup_{t>0} \frac{\|z_n(t)\|}{\varrho(t)}\right) \\ &\leq \frac{(1+M_A)(\|\varphi\|_h + \Psi_g(n))}{n} + M_A \sum_{k\in\Lambda} l_k + 2\sup_{t>0} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)} m(s)ds.\end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức cuối, ta thu được điều mâu thuẫn với (4.29). Định lí được chứng minh. □

4.4. TÍNH ỔN ĐỊNH YẾU

Trong mục này, để chứng minh tính ổn định yếu của nghiệm không, ta phải thay các giả thiết (**A**), (**F**) and (**G**) bởi các giả thiết mạnh hơn:

*(**A***) Nửa nhóm $W(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn và ổn định mũ, tức là tồn tại $\beta > 0$ sao cho*

$$\|W(t)x\| \leq M_A e^{-\beta t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in X.$$

*(**F***) Hàm phi tuyến đa trị F thỏa mãn (**F**) với $m \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$.*

*(**G***) Hàm không cục bộ g thỏa mãn (**G**) với $\Psi_g(r) = \nu \cdot r, \forall r \geq 0$, ở đây ν là một hằng số dương.*

Ta có mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 4.3. *[5] Nếu giả thiết (**A***) thỏa mãn, thì các toán tử giải thức $S_\alpha(\cdot), P_\alpha(\cdot)$ là ổn định tiệm cận, tức là*

$$\|S_\alpha(t)\|, \|P_\alpha(t)\| \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Như vậy, trong mục này, chọn $\varrho(t) \equiv 1$ với mọi $t \geq 0$, ta có

$$\frac{\|S_\alpha(t)\|}{\varrho(t)}, \frac{\|P_\alpha(t)\|}{\varrho(t)} \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Xét không gian

$$PC_0 = \{u \in PC([-h, +\infty); X) : \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0\},$$

với chuẩn

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \geq -h} \|u(t)\|.$$

Khi đó, $\mathcal{PC}_0$ là một không gian Banach. Xét ánh xạ nghiệm $\mathcal{F}$ trên $\mathcal{PC}_0$ và lí luận tương tự như trong Mục 4.3., ta chứng minh được sự tồn tại của nghiệm hút toàn cục như sau.

Định lí 4.2. *Giả sử (**A***), (**F***), (**G***) và (**I**) thỏa mãn. Khi đó, bài toán (4.1)-(4.3) có nghiệm tích phân thỏa mãn $\|u(t)\| = o(1)$ khi $t \to +\infty$, với điều*

kiện

$$\ell = \eta M_A + M_A \sum_{k\in\Lambda} \mu_k + 8 \sup_{t\geq 0} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\|_\chi k(s)ds < 1, \quad (4.30)$$

$$\varpi = (1+M_A)\nu + M_A \sum_{k\in\Lambda} l_k + 2 \sup_{t>0} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\| m(s)ds < 1. \quad (4.31)$$

Chứng minh. Trong trường hợp này, các giả thiết của Bổ đề 4.6 và Định lí 4.1 đều thỏa mãn. Do $m \in L^1(\mathbb{R}^+)$, ta có điều kiện (4.27) thỏa mãn. Hơn nữa, điều kiện (4.28) được suy ra từ (4.31), trong khi điều kiện (4.31) chính là (4.29). Như vậy, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Sau đây là định lí chính của mục này.

Định lí 4.3. *Với các giả thiết của Định lí 4.2 thỏa mãn. Khi đó, nghiệm không của bài toán* (4.1)-(4.3) *là ổn định tiệm cận yếu.*

Chứng minh. Đặt $\Sigma(\varphi)$ là tập các nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) với điều kiện ban đầu φ. Ta thấy $0 \in \Sigma(0)$ do $F(t,0,0) = 0$, $g(0) = 0$ và $I_k(0) = 0, k \in \Lambda$. Từ Định lí 4.2 ta có, với mỗi $\varphi \in C([-h,0];X)$ tồn tại $u \in \Sigma(\varphi)$ sao cho $\|u(t)\| \to 0$ khi $t \to +\infty$. Do đó, ta có $\|u_t\|_h \to 0$ khi $t \to +\infty$, tức là nghiệm không là hút yếu. Như vậy, ta còn phải chứng minh rằng nghiệm này là ổn định.

Xét $\varphi \in C([-h,0];X)$ và $u \in \Sigma(\varphi)$, khi đó, tồn tại $f \in \mathcal{P}_F^p(u)$ sao cho

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi(t) - g(u)(t),\ t \in [-h,0], \\ u(t) &= S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k) I(u(t_k)) \\ &\qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s)ds,\ t > 0. \end{aligned}$$

Sử dụng các giả thiết (**F***), (**G***) và (**I**), ta có

$$\|u(t)\| \le \|\varphi\|_h + \nu\|u\|_\infty,\ t \in [-h, 0],$$

$$\|u(t)\| \le M_A(\|\varphi\|_h + \nu\|u\|_\infty) + M_A\|u\|_\infty \sum_{k\in\Lambda} l_k$$
$$+ 2\|u\|_\infty \sup_{t>0} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|m(s)ds,\ t > 0,$$

trong đó $\|\cdot\|_\infty$ là chuẩn trong PC_0. Từ các ước lượng này, ta có

$$\|u\|_\infty \le \left[(1+M_A)\nu + M_A \sum_{k\in\Lambda} l_k + 2\sup_{t>0}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|m(s)ds\right]\|u\|_\infty$$
$$+ (1+M_A)\|\varphi\|_h.$$

Do đó

$$\|u_t\|_h \le \|u\|_\infty \le \frac{1+M_A}{1-\varpi}\|\varphi\|_h, \forall t > 0,$$

trong đó ϖ được cho trong (4.31). Bất đẳng thức cuối này cho ta tính ổn định của nghiệm không. Như vậy, định lí được chứng minh. □

4.5. ÁP DỤNG

Ở mục này, chúng tôi áp dụng các kết quả trừu tượng đạt được ở trên cho một hệ vi phân lưới

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}u_i(t) = (Au(t))_i + f_i(t),\ t > 0, t \ne t_k, k \in \mathbb{N}, \tag{4.32}$$

$$f_i(t) \in [f_{1i}(t, u_i(t), u_i(t-\rho(t))), f_{2i}(t, u_i(t), u_i(t-\rho(t)))], \tag{4.33}$$

$$\Delta u_i(t_k) = I_{ik}(u_i(t_k)), \tag{4.34}$$

$$u_i(s) + \sum_{j=1}^N c_j u_i(\tau_j + s) = \varphi_i(s), s \in [-h, 0], \tau_j > 0, \tag{4.35}$$

trong đó $u = (u_i) : [-h, +\infty) \to \ell^2$, $\dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ là đạo hàm theo nghĩa Caputo bậc $\alpha \in (0, 1)$, $A : \ell^2 \to \ell^2$ là toán tử tuyến tính xác định bởi

$$(Av)_i = v_{i+1} - (2+\lambda)v_i + v_{i-1},\ v \in \ell^2,$$

$\rho : \mathbb{R}^+ \to [0, h]$ là một hàm liên tục, λ là một số dương. Ở đây ℓ^2 là không gian các dãy $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ thỏa mãn $\sum_{i\in\mathbb{Z}} v_i^2 < \infty$, và là một không gian Hilbert với tích vô hướng $(u, v)_{\ell^2} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i v_i$, kí hiệu $[f_1, f_2] = \{\tau f_1 + (1-\tau) f_2 : \tau \in [0, 1]\}$.

Hệ vi phân dạng lưới như (4.32)-(4.35) xuất hiện trong nhiều bài toán thực tiễn, ví dụ như xử lí ảnh, bài toán nhận dạng mẫu, kỹ thuật điện,... Nó cũng có thể được coi như một mô hình nửa rời rạc của bao hàm thức đạo hàm riêng bậc phân số

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \lambda u(x,t) + f(x,t),\ x \in \mathbb{R}, t > 0,\\
&\qquad f(x,t) \in [f_1(x,t,u(x,t),u(x,t-\rho(t))), f_2(x,t,u(x,t),u(x,t-\rho(t)))],\\
&\Delta u(x,t_k) = I_k(x, u(x,t_k)),\\
&\qquad u(x,s) + \sum_{j=1}^{N} c_j u(x, \tau_j + s) = \varphi(x,s), s \in [-h, 0],
\end{aligned}$$

trong đó ta rời rạc hóa biến x.

Xét $B : \ell^2 \to \ell^2$ là toán tử tuyến tính định nghĩa bởi $(Bv)_i = v_{i+1} - v_i$, thì B^* được xác định bởi $(B^* v)_i = v_{i-1} - v_i$. Hơn nữa, nếu $\tilde{A} : \ell^2 \to \ell^2$ được xác định bởi $(\tilde{A}v)_i = v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}$ thì

$$-\tilde{A} = BB^* = B^* B.$$

Ta có $A = \tilde{A} - \lambda I$ là toán tử bị chặn trên ℓ^2. Do đó nửa nhóm $\{e^{tA} : t \geq 0\}$ là liên tục đều (xem [34]) và do đó nó liên tục theo chuẩn. Tuy nhiên, nửa nhóm này là không compact, do nó có thể mở rộng thành nhóm $\{e^{tA} : t \in \mathbb{R}\}$ và toán tử $I = e^{tA} e^{-tA}$ là không compact.

Để thu được kết quả ổn định mũ của $\{e^{tA} : t \geq 0\}$, ta xét hệ

$$\frac{dv(t)}{dt} = \tilde{A} v(t) - \lambda v(t),\ v(t) \in \ell^2.$$

Nhân hai vế với v ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 &= (\tilde{A}v(t), v(t)) - \lambda\|v(t)\|^2\\ &= -(B^*Bv(t), v(t)) - \lambda\|v(t)\|^2 = -\|Bv(t)\|^2 - \lambda\|v(t)\|^2\\ &\leq -\lambda\|v(t)\|^2.\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Gronwall ta có

$$\|v(t)\| \leq e^{-\lambda t}\|v(0)\|,$$

và do đó $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t}, t \geq 0$, tức là nửa nhóm $\{e^{tA} : t \geq 0\}$ là ổn định mũ. Như vậy, giả thiết $(\mathbf{A}^*)$ thỏa mãn.

Trước khi xét tới cấu trúc của hệ (4.32)-(4.35), ta nhắc lại về độ đo Hausdorff trong ℓ^2 (xem [10, Định lí 4.2]). Gọi $R_n : \ell^2 \to \ell^2$ là toán tử tuyến tính xác định bởi

$$R_n(v) = \sum_{|i|>n} v_i e_i,$$

trong đó $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{Z}}$. Khi đó $\chi : 2^{\ell^2} \to \mathbb{R}^+$ được xác định bởi

$$\chi(B) = \limsup_{n\to+\infty}[\sup_{v\in B}\|R_n(v)\|] = \limsup_{n\to+\infty}\left[\sup_{v\in B}\left(\sum_{|i|>n}|v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

là độ đo Hausdorff trong ℓ^2.

Bây giờ ta xét các giả thiết

(N1) Các hàm $f_{1i}, f_{2i} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}$, liên tục và thỏa mãn

$$\max\{|f_{1i}(t,y,z)|^2, |f_{2i}(t,y,z)|^2\} \leq m^2(t)(|y|^2+|z|^2), \forall(t,\eta,z) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,$$

trong đó $m \in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ thỏa mãn

$$m(t) \leq \frac{C_m}{1+t^{\alpha+1}} \text{ với } C_m > 0.$$

(N2) Các hàm $I_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$, là các hàm liên tục và

$$|I_{ik}(y)| \leq l_k|y|,$$

với $\{l_k : k \in \mathbb{N}\}$ là một dãy không âm thỏa mãn $\sum_{k\in\mathbb{N}} l_k < \infty$.

Xét $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \times \ell^2 \times C([-h,0];\ell^2) \to \ell^2$ là các hàm được xác định như sau

$$f_1(t,v,w) = (f_{1i}(t, v_i, w_i(-\rho(0))))_{i\in\mathbb{Z}},$$
$$f_2(t,v,w) = (f_{2i}(t, v_i, w_i(-\rho(0))))_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Như vậy f_1, f_2 là liên tục. Hơn nữa, từ (N1) ta có

$$\begin{aligned}
\|f_1(t,v,w)\|^2 &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} |f_{1i}(t, v_i, w_i(-\rho(0)))|^2 \\
&\le m^2(t) \sum_{i\in\mathbb{Z}} (|v_i|^2 + |w_i(-\rho(0))|^2) \\
&= m^2(t)(\|v\|^2 + \|w(-\rho(0))\|^2 \\
&\le m^2(t)(\|v\|^2 + \sup_{s\in[-h,0]} \|w(s)\|^2).
\end{aligned}$$

Tương tự

$$\|f_2(t,v,w)\|^2 \le m^2(t)(\|v\|^2 + \sup_{s\in[-h,0]} \|w(s)\|^2).$$

Đặt

$$F(t,v,w) = [f_1(t,v,w), f_2(t,v,w)], v \in \ell^2, w \in C([-h,0];\ell^2),$$

ta có

$$\|F(t,v,w)\| \le m(t)(\|v\| + \|w\|_h).$$

Mặt khác, với mỗi $(t,v,w) \in \mathbb{R}^+ \times \ell^2 \times C([-h,0];\ell^2)$, $F(t,v,w)$ là một tập lồi, tức là, F là hàm đa trị với giá trị lồi. Ngoài ra, $F(t,v,w) \subset \text{span}\{f_1(t,v,w), f_2(t,v,w)\}$, tức là $F(t,v,w)$ là một tập bị chặn nằm trong không gian con hai chiều của ℓ^2, do đó $F(t,v,w)$ là compact. Do f_1, f_2 liên tục, hàm đa trị $(v,w) \mapsto F(t,v,w)$ đóng. Điều này kéo theo $F(t,\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục trên với mỗi $t \in \mathbb{R}$. Chú ý rằng với mỗi $u \in PC_0$, $\tau \in [0,1]$, hàm

$$f(t) = \tau f_1(t, u(t), u(t-\rho(t))) + (1-\tau) f_2(t, u(t), u(t-\rho(t))), \tau \in [0,1]$$

là đo được mạnh. Vậy, $(\mathbf{F})(1)$-$(\mathbf{F})(3)$ thỏa mãn.

Bây giờ, ta đánh giá $\chi(F(t,V,W))$ với $V \subset \ell^2, W \subset C([-h,0];\ell^2)$ là các tập bị chặn. Ta có

$$\sup_{(v,w)\in V\times V} \|R_n[f_1(t,v,w)]\| = \left(\sum_{|i|>n} |f_{1i}(t,v_i,w_i(-\rho(0)))|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq m(t) \sup_{(v,w)\in V\times V} \left(\sum_{|i|>n} \left[|v_i|^2 + |w_i(-\rho(0))|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq m(t) \sup_{(v,w)\in V\times V} \left[\left(\sum_{|i|>n} |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{|i|>n} |w_i(-\rho(0))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq m(t)\left[\sup_{v\in V}\left(\sum_{|i|>n} |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{w\in W}\left(\sum_{|i|>n} |w_i(-\rho(0))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= m(t)\left[\sup_{v\in V}\|R_n(v)\| + \sup_{w\in W}\|R_n(w(-\rho(0)))\|\right].$$

Qua giới hạn bất đẳng thức cuối cùng, ta được

$$\begin{aligned}\chi(f_1(t,V,W)) &\leq m(t)\big[\chi(V) + \chi(W(-\rho(0)))\big]\\ &\leq m(t)\big[\chi(V) + \sup_{s\in[-h,0]}\chi(W(s))\big].\end{aligned}$$

lí luận tương tự cho f_2, ta có

$$\chi(f_2(t,V,W)) \leq m(t)\big[\chi(V) + \sup_{s\in[-h,0]}\chi(W(s))\big].$$

Ta có

$$F(t,V,W) \subset \mathrm{co}\{f_1(t,V,W) \cup f_2(t,V,W)\},$$

nên

$$\begin{aligned}\chi(F(t,V,W)) &\leq \chi\left(f_1(t,V,W) \cup f_2(t,V,W)\right)\\ &\leq \max\{\chi\left(f_1(t,V,W)\right), \chi\left(f_2(t,V,W)\right)\}\\ &\leq m(t)\big[\chi(V) + \sup_{s\in[-h,0]}\chi(W(s))\big].\end{aligned}$$

Như vậy (**F**)(4) thỏa mãn và như vậy (**F***) cũng được thỏa mãn với $k = m$.

Ta xét $I_k : \ell^2 \to \ell^2, k \in \mathbb{N}$, xác định bởi

$$I_k(v) = (I_{ik}(v_i))_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Từ tính liên tục của I_{ik} suy ra tính liên tục của I_k. Hơn nữa, từ (N2) ta có

$$\begin{aligned}\|I_k(v)\| &= \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |I_{ik}(v_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le l_k \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= l_k\|v\|.\end{aligned}$$

Do đó (**I**)(1) được thỏa mãn. Với $V \subset \ell^2$ là một tập bị chặn. Ta có

$$\begin{aligned}\sup_{v\in V} \|R_n(I_k(v))\| &= \sup_{v\in V} \left(\sum_{|i|>n} |I_{ik}(v_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le l_k \sup_{v\in V} \left(\sum_{|i|>n} |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = l_k \sup_{v\in V} \|R_n(v)\|.\end{aligned}$$

Qua giới hạn bất đẳng thức cuối khi $n \to +\infty$, ta thu được

$$\chi(I_k(V)) \le l_k\chi(V).$$

Như vậy, giả thiết (**I**) thỏa mãn với $\mu_k = l_k, k \in \mathbb{N}$, với điều kiện $\inf\{t_{k+1} - t_k : k \in \mathbb{N}\} > 0$.

Đối với điều kiện không cục bộ, xét hàm $g : PC_0 \to C([-h, 0]; \ell^2)$ xác định bởi

$$(g(u)(s))_i = \sum_{j=1}^{N} c_j u_i(\tau_j + s).$$

Từ đó ta có, với $u, v \in PC_0$,

$$\begin{aligned}\|g(u)(s) - g(v)(s)\| &\le \sum_{j=1}^{N} |c_j| \|u(\tau_j + s) - v(\tau_j + s)\| \\ &\le \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|\right) \sup_{t\in[-h,\tau_N]} \|u(t) - v(t)\|.\end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$\|g(u) - g(v)\|_h \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|\right) \|u - v\|_{PC([-h,\tau_N];\ell^2)}.$$

Bất đẳng thức cuối này cho ta

$$\begin{aligned}
\|g(u)\|_h &\leq \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|\right) \|u\|_\infty, \\
\chi_h(g(D)) &\leq \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|\right) \chi_{PC}(\pi_T(D)), T = \tau_N, \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|\right) \chi_\infty(D).
\end{aligned}$$

Do đó ($\mathbf{G}^*$) thỏa mãn với $\eta = \nu = \sum_{j=1}^{N} |c_j|$.

Cuối cùng, ta đưa ra ước lượng cho tích phân

$$I(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\| m(s) ds.$$

Chú ý rằng trong trường hợp này $\|e^{tA}\| \leq 1$, do đó $\|P_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \forall t \geq 0$. Vậy

$$\begin{aligned}
I(t) &\leq \frac{C_m}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+s^{\alpha+1}} ds + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+s^{\alpha+1}} ds \right) \\
&\leq \frac{C_m}{\Gamma(\alpha)} \left(\left(\frac{t}{2}\right)^{\alpha-1} \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{ds}{1+s^{\alpha+1}} + \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds \right) \\
&\leq \frac{C_m}{\Gamma(\alpha)} \left(J(t) + \frac{1}{\alpha} \right),
\end{aligned}$$

trong đó

$$J(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{\alpha-1} \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{ds}{1+s^{\alpha+1}}.$$

Do

$$\lim_{t\to 0} J(t) = \lim_{t\to+\infty} J(t) = 0,$$

ta có $\sup_{t>0} J(t) < \infty$, vậy $\sup_{t>0} I(t) < \infty$. Từ các điều kiện (4.30)-(4.31) thỏa mãn với các hệ số C_m, l_k, c_j nhỏ, ta thu được tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm không của hệ (4.32)-(4.35).

4.6. TRƯỜNG HỢP BÀI TOÁN ĐƠN TRỊ

Trong mục này, ta xét một trường hợp đặc biệt của bài toán (4.1)-(4.3), đó là khi hàm F là hàm đơn trị, ký hiệu là f. Khi đó, bài toán trở thành

$$^{C}D_0^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t, u(t), u_t),\ t \neq t_k, t_k \in (0, +\infty), k \in \Lambda, \tag{4.36}$$

$$\Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \tag{4.37}$$

$$u(s) + g(u)(s) = \varphi(s),\ s \in [-h, 0]. \tag{4.38}$$

Đối với bài toán đơn trị này, ta chứng minh sự tồn tại duy nhất của nghiệm phân rã $u \in \mathcal{PC}_0$ với các điều kiện:

*(**Aa**) Nửa nhóm $W(\cdot)$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn và ổn định mũ, tức là tồn tại $\beta > 0$ sao cho*

$$\|W(t)x\| \leq M_A e^{-\beta t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in X.$$

*(**Fa**) $f(\cdot, v, w)$ đo được với mỗi $v \in X$, $f(t, \cdot, \cdot)$ liên tục hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t, 0, 0) = 0$, và tồn tại $k \in L^p(\mathbb{R}^+), p > \frac{1}{\alpha}$ thỏa mãn*

$$||f(t, v_1, w_1) - f(t, v_2, w_2)|| \leq k(t)(||v_1 - v_2|| + ||w_1 - w_2||_h), t \in \mathbb{R}^+,$$

với mọi $v_1, v_2 \in X, w_1, w_2 \in C([-h, 0]; X)$.

*(**Ga**) g là một hàm liên tục thỏa mãn $g(0) = 0$ và tồn tại số không âm η để*

$$||g(w_1) - g(w_2)||_h \leq \eta||w_1 - w_2||_\infty,$$

với mọi $w_1, w_2 \in \mathcal{PC}_0$.

*(**Ia**) $I_k, k \in \Lambda$, liên tục, $I_k(0) = 0$ và tồn tại một dãy $\{\mu_k\}, k \in \Lambda$ thỏa mãn*

$$||I_k(x) - I_k(y)|| \leq \mu_k ||x - y||, \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Xét toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ trên không gian $\mathcal{PC}_0$, áp dụng nguyên lí ánh xạ co Banach, ta có định lí sau về sự tồn tại và duy nhất nghiệm phân rã của bài toán (4.36)-(4.38).

Định lí 4.4. *Giả sử* (**A**), (**Fa**), (**Ga**), (**Ia**) *và* (**R**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (4.36)-(4.38) *có duy nhất nghiệm $u \in \mathcal{PC}_0$, với điều kiện*

$$\Big(\eta + \sum_{k \in \Lambda} \mu_k\Big) M_A + 2 \sup_{t \geq 0} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\| k(s) ds < 1. \tag{4.39}$$

Chứng minh. Để chứng minh định lí này, chúng ta sẽ sử dụng nguyên lí ánh xạ co Banach. Đầu tiên, ta chứng minh $\mathcal{F}$ giữ bất động $\mathcal{PC}_0$. Ở đây, ta gọi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u)(t) = S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum_{0 < t_k < t} S_\alpha(t - t_k) I_k(u(t_k)) \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s, u(s), u_s) ds, t > 0.\end{aligned}$$

Lấy $u \in \mathcal{PC}_0$ mà $R = ||u||_\infty > 0$. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{PC}_0$, tức là, $\mathcal{F}(u)(t) \to 0$, khi $t \to +\infty$.

Với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $T_1 > 0$ mà

$$||u(t)|| \leq \epsilon, \forall t > T_1, \tag{4.40}$$

$$||u_t||_h = \sup_{\tau \in [-h, 0]} ||u(t + \tau)|| \leq \epsilon, \forall t > T_1 + h. \tag{4.41}$$

Mặt khác, từ giả thiết $\sum_{k \in \Lambda} \mu_k < +\infty$, tồn tại $N_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\sum_{k > N_0} \mu_k \leq \epsilon.$$

Do đó, với $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
||\mathcal{F}(u)(t)|| \leq\ & ||S_\alpha(t)||(||\varphi||_h + ||g(u)||_h) \\
& + \sum_{k \leq N_0} ||S_\alpha(t-t_k)||\, ||I_k(u(t_k))|| \\
& + \sum_{k > N_0} ||S_\alpha(t-t_k)||\, ||I_k(u(t_k))|| \\
& + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||P_\alpha(t-s)||\, ||f(s,u(s))|| ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \leq ||S_\alpha(t)||(||\varphi||_h + \eta R) \\
& \quad + R \sum_{k \leq N_0} ||S_\alpha(t-t_k)||\, \mu_k + RM_A \sum_{k > N_0} \mu_k \\
& \quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||P_\alpha(t-s)||\, k(s)\, (||u(s)|| + ||u_s||_h) ds \\
& = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)
\end{aligned}
$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
E_1(t) &= ||S_\alpha(t)||(||\varphi||_h + \eta R), \\
E_2(t) &= R \sum_{k \leq N_0} ||S_\alpha(t-t_k)||\, \mu_k + RM_A \sum_{k > N_0} \mu_k, \\
E_3(t) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||P_\alpha(t-s)||\, k(s)\, (||u(s)|| + ||u_s||_h) ds.
\end{aligned}
$$

Từ giả thiết (**Aa**), tồn tại $T_2 > 0$ thỏa mãn

$$
||S_\alpha(t)|| \leq \epsilon, ||P_\alpha(t)|| \leq \epsilon, \forall t > T_2,
$$

vì vậy

$$
E_1(t) \leq (1+\eta) R\epsilon,\ \forall t > T_2. \tag{4.42}
$$

Ngoài ra, ta có

$$
E_2(t) \leq \Big(\sum_{k \leq N_0} \mu_k + M_A \Big) R\epsilon,\ \forall t > T_2 + t_{N_0}. \tag{4.43}
$$

Bây giờ, ta xét $E_3(t)$, với $t > T_1 + h$ ta có

$$\begin{aligned}
E_3(t) &= \Big(\int_0^{T_1+h} + \int_{T_1+h}^{t}\Big)(t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\, k(s)\,(||u(s)|| + ||u_s||_h)ds \\
&\le 2R\int_0^{T_1+h}(t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\, k(s)ds \\
&\quad + 2\epsilon\int_{T_1+h}^{t}(t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\, k(s)ds
\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}
E_3(t) &\le 2R\epsilon\int_0^{T_1+h}(t-s)^{\alpha-1}\, k(s)ds \\
&\quad + 2\epsilon\int_{T_1+h}^{t}(t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\, k(s)ds
\end{aligned}$$

với $t > T_2 + T_1 + h$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
E_3(t) &\le 2R\epsilon\Big(\int_0^{T_1+h}(t-s)^{(\alpha-1)p'}ds\Big)^{1/p'}\Big(\int_0^{T_1+h}(k(s))^p ds\Big)^{1/p} \\
&\quad + 2\epsilon\int_{T_1+h}^{t}(t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\, k(s)ds \\
&\le \Big(2RC_\alpha(t)\,||k||_{L^p(\mathbb{R}^+)} + 1\Big)\epsilon \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

với $t > T_2 + T_1 + h$, trong đó $p' = \dfrac{p}{p-1}$,

$$C_\alpha(t) = \Big\{\frac{1}{(\alpha-1)p'+1}\Big[t^{(\alpha-1)p'+1} - (t-T_1-h)^{(\alpha-1)p'+1}\Big]\Big\}^{1/p'},$$

đến đây, ta sử dụng tính chất

$$2\int_{T_1+h}^{t}(t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\, k(s)ds < 1$$

từ (4.39). Kết hợp (4.42), (4.43) và (4.44) cho ta

$$||\mathcal{F}(u)(t)|| \le C\epsilon$$

với $t > \max\{T_2 + T_1 + h, T_2 + t_{N_0}\}$, trong đó

$$\begin{aligned}
C &= (1+\eta)R + \Big(\sum_{k\le N_0}\mu_k + M_A\Big)R + 2RC_\alpha(t)\,||k||_{L^p(\mathbb{R}^+)} + 1 \\
&\le (1+\eta)R + \Big(\sum_{k\in\Lambda}\mu_k + M_A\Big)R + 2RC_\alpha(t)\,||k||_{L^p(\mathbb{R}^+)} + 1.
\end{aligned}$$

Với $C_\alpha(t)$, từ $p > \dfrac{1}{\alpha}$, $p' < \dfrac{1}{1-\alpha}$, ta thấy $0 < (\alpha-1)p' + 1 < 1$. Từ đó

$$t^{(\alpha-1)p'+1} - (t - T_1 - h)^{(\alpha-1)p'+1} = t^{(\alpha-1)p'+1}\Big[1 - \Big(1 - \frac{T_1 + h}{t}\Big)^{(\alpha-1)p'+1}\Big]$$
$$\sim [(\alpha-1)p' + 1](T_1 + h)t^{(\alpha-1)p'} \text{ khi } t \to \infty.$$

Do đó $C_\alpha(t)$ là bị chặn, vì vậy C cũng bị chặn. Từ đó suy ra $\mathcal{F}(\mathcal{PC}_0) \subset \mathcal{PC}_0$.

Nhiệm vụ còn lại của chúng ta là chứng minh $\mathcal{F}$ là ánh xạ co. Thật vậy, với $u, v \in \mathcal{PC}_0$, ta có

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{F}(u)(t) - \mathcal{F}(v)(t)|| \\
&\quad \le ||S_\alpha(t)||\,||g(u) - g(v)||_h \\
&\qquad + \sum_{0<t_k<t} ||S_\alpha(t - t_k)||\,||I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k))|| \\
&\qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\,||f(s, u(s), u_s) - f(s, v(s), v_s)||ds \\
&\quad \le M_A\,\eta||u - v||_\infty + \Big(M_A \sum_{0<t_k<t} \mu_k\Big)||u - v||_\infty \\
&\qquad + 2\Big(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}||P_\alpha(t-s)||\,k(s)ds\Big)||u - v||_\infty,
\end{aligned}$$

nhờ các giả thiết (**Fa**), (**Ga**) và (**Ia**). Do đó

$$||\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)||_\infty \le \ell||u - v||_\infty,$$

với

$$\ell = \Big(\eta + \sum_{k\in\Lambda} \mu_k\Big)M_A + 2\sup_{t\ge 0}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|k(s)ds < 1.$$

Vậy, ta có kết quả cần chứng minh. □

Kết luận Chương 4

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu tính ổn định yếu cho lớp bao hàm thức vi phân bậc phân số có xung, trễ hữu hạn với điều kiện không cục bộ. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh sự tồn tại nghiệm trên nửa trục của bài toán tổng quát (Định lí 4.1).

2) Chứng minh tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm không (Định lí 4.3).

3) Áp dụng kết quả trừu tượng thu được, chứng minh tính ổn định yếu của một hệ vi phân lưới (Mục 4.5).

4) Trong trường hợp bài toán đơn trị, chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm phân rã (Định lí 4.4).

Theo sự hiểu biết của tác giả, các kết quả này là những nghiên cứu đầu tiên về tính ổn định cho lớp bài toán dạng (4.1)-(4.3). Các kỹ thuật ước lượng tích phân bậc phân số và ước lượng theo độ đo không compact có thể sử dụng để nghiên cứu tính ổn định nghiệm cho nhiều lớp bài toán theo hướng sử dụng lý thuyết điểm bất động.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này chúng tôi đã nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của một số hệ vi phân đa trị trong không gian Banach tổng quát. Luận án đã đạt được các kết quả sau:

- Đối với lớp bao hàm thức vi phân có trễ hữu hạn mà phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân: Chứng minh tính giải được toàn cục và sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa dòng đa trị sinh bởi bài toán.
- Đối với lớp bao hàm thức vi phân dạng đa diện, phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân: Chứng minh được sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn.
- Đối với lớp bao hàm thức vi phân bậc phân số, có xung, với điều kiện không cục bộ và trễ hữu hạn: Chứng minh được tính giải được trên nửa trục và tính ổn định tiệm cận yếu. Trong trường hợp đặc biệt, hàm phi tuyến đơn trị và thỏa mãn điều kiện Lipschitz, chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm phân rã.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận (theo cách tiếp cận của lí thuyết tập hút hoặc lí thuyết ổn định) của một số lớp bao hàm thức vi phân với trễ biến

thiên hoặc trễ vô hạn cùng với các vần đề liên quan như tính chính qui của nghiệm, tính trơn của tập hút, tính ổn định trong thời gian hữu hạn của nghiệm.

- Nghiên cứu sự tồn tại của các lớp nghiệm đặc biệt như nghiệm tuần hoàn, đối tuần hoàn, nghiệm tối ưu của một số lớp bao hàm thức vi phân nửa tuyến tính không có cấu trúc đa diện.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1) T.D. Ke and D. Lan (2014), Decay integral solutions for a class of impulsive fractional differential equations in Banach spaces, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Volume 17, Number 1, 96-121.

2) T.D. Ke and D. Lan (2014), Global attractor for a class of functional differential inclusions with Hille–Yosida operators, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, Volume 103, 72–86

3) T.D. Ke and D. Lan, Generalized Cauchy problem governed by fractional differential inclusions on the half-line, *submitted*

4) T.D. Ke and D. Lan, Existence of anti-periodic solutions for a class of polytope differential inclusions with Hille-Yosida operators, *submitted*

Tài liệu tham khảo

[1] M. Adimy, H. Bouzahir and K. Ezzinbi (2002), Local existence and stability for some partial functional differential equations with infinite delay, *Nonlinear Anal.* 48, 323-348.

[2] S. Adly and L.B. Khiet (2014), Stability and invariance results for a class of non-monotone set-valued Lur'e dynamical systems, *Appl. Anal.* 93, no. 5, 1087–1105.

[3] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina and B.N. Sadovskii (1992), *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

[4] M. Alia and K. Ezzinbi (2008), Strong solutions for some nonlinear partial functional differential equations with infinite delay, *Electron. J. Differential Equations* 91, 1-19.

[5] C.T. Anh and T.D. Ke (2014), On nonlocal problems for retarded fractional differential equations in Banach spaces, *Fixed Point Theory* 15, No.2, 373-392.

[6] Anthony W. Knapp (2005), *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

[7] W. Arendt (1987), Resolvent positive operators, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 54 (2), 321–349.

[8] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber and F. Neubrander (2001), *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, in: Monographs in Mathematics, vol. 96, Birkhauser Verlag, Basel.

[9] J.P. Aubin and A. Cellina (1984), *Differential Inclusions. Set-valued Maps and Viability Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

[10] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides and G. López Acedo (1997), *Measures of noncompactness in metric fixed point theory. Operator Theory: Advances and Applications*, 99. Birkhäuser Verlag, Basel.

[11] J.M. Ball (1997), Continuity properties and global attractor of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations, *J. Nonlinear Sci.* 7, 475-502.

[12] J.M. Ball (2004), Global attractor for damped semilinear wave equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 10, 31-52.

[13] M.T. Batchelor, R.J. Baxter, M.J. O'Rourke and C.M. Yung (1995), Exact solution and interfacial tension of the six-vertex model with anti-periodic boundary conditions, *Journal of Physics A: Math. Theo.* 28, 2759-2770.

[14] M. Benchohra, J. Henderson and S. Ntouyas (2006), *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, in: Contemporary Mathematics and its Applications, Vol. 2. Hindawi, New York.

[15] H. Brezis (2011), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext. Springer, New York.

[16] L.L. Bonilla and F.J. Higuera (1995), The onset and end of the Gunn effect in extrinsic semiconductors, *SIAM J. Appl. Math.* 55, 1625-1649

[17] D. Bothe (1998), Multivalued perturbations of m-accretive differential inclusions, *Israel J. Math* 108, 109-138.

[18] H. Bouzahir, H. You and R. Yuan (2011), Global attractor for some partial functional differential equations with infinite delays, *Funkcialaj Ekvacioj* 54, 139-156.

[19] T.A. Burton (2006), *Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations*, Dover Publications, New York.

[20] L. Byszewski (1991), Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.* 162, 494-505.

[21] T. Caraballo and P. E. Kloeden (2009), Non-autonomous attractor for integro-differential evolution equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 2, 17-36.

[22] T. Caraballo, P. Marin-Rubio and J.C. Robinson (2003), A comparision between to theories for multi-valued semiflows and their asymptotic behaviour, *Set-Valued Analysis* 11, 297-322.

[23] T. Caraballo, M. J. Garrido-Atienza, B. Schmalfuss and J. Valero (2008), Non-autonomous and random attractors for delay random semilinear equations without uniqueness, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 21, 415-443.

[24] T. Caraballo, J. A. Langa, V. S. Melnik and J. Valero(2003), Pullback attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems, *Set-Valued Analysis* 11, 153-201.

[25] A. Cernea (2012), On the existence of mild solutions for nonconvex fractional semilinear differential inclusions, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 64, 1-15.

[26] N.M. Chuong and T.D. Ke (2012), Generalized Cauchy problem involving nonlocal and impulsive conditions, *J. Evol. Equ.* 12, 367-392.

[27] V.V. Chepyzhov and M.I. Vishik (2002), *Attractors for Equations of Mathematics Physics*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 49, American Mathematical Society, Providence.

[28] V.V. Chepyzhov and M.I. Vishik (1997), Evolution equations and their trajectory attractors, *J. Math. Pures Appl.* 76, 913-964.

[29] Y. Chen, D. O'Regan and R.P. Agarwal (2012), Anti-periodic solutions for semilinear evolution equations in Banach spaces, *J. Appl. Math. Comput.* 38, 63–70.

[30] M. Coti Zelati and P. Kalita (2015), Minimality properties of set-valued processes and their pullback attractors, *SIAM J. Math. Anal.* 47, 1530-1561.

[31] G. Da Prato and E. Sinestrari (1987), Differential Operators with Non-Dense Domain, *Ann. Sc. Norm. Pisa.* 14, 285-344.

[32] K. Deimling (1992), *Multivalued differential equations*, Walter de Gruyter & Co., Berlin.

[33] J. Diestel, W. M. Ruess and W. Schachermayer (1993), Weak compactness in $L^l(\mu, X)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 118, 447-453.

[34] K.-J. Engel and R. Nagel (2000), *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, with contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt. Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer-Verlag, New York.

[35] K. Ezzinbi and S. Lalaoui Rhali (2003), Positivity and stability for some partial functional differential equations, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 10, 15-32.

[36] A. F. Filippov (1988), *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*, translated from the Russian. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[37] L. Górniewicz and M. Lassonde (1994), Approximation and fixed points for compositions of R_δ-maps, *Topology Appl.* 55 (3), 239-250.

[38] A. Haraux (1989), Anti-periodic solutions of some nonlinear evolution equations, *Manuscripta Math.* 63, 479-505.

[39] L. Hörmander (1960), Estimates for translation invariance operators in L^p spaces, *Acta Math.* 104, 93-139.

[40] S. Ji and S. Wen (2010), Nonlocal Cauchy Problem for Impulsive Differential Equations in Banach Spaces, *Int. J. Nonlinear Sci.* 10, 88-95.

[41] P. Kalita and G. Lukaszewicz (2014), Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties, *Nonlinear Anal.* 101, 124-143.

[42] M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca (2001), *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, in: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 7, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[43] H. Kellerman and M. Hieber (1989), Integrated semigroup, *J. Funct. Anal.* 84, 160-180.

[44] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo (2006), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam.

[45] D.S. Kulshreshtha, J.Q. Liang and H.J.W. Muller-Kirsten (1993), Fluctuation equations about classical field configurations and supersymmetric quantum mechanics, *Ann. Physics.* 225, 191-211.

[46] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov and P. S. Simeonov (1989), *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ.

[47] J.H. Liu (2003), A remark on the mild solutions of non-local evolution equations, *Semigroup Forum* 66, 63-67.

[48] H. Liu and J.-C. Chang (2009), Existence for a class of partial differential equations with nonlocal conditions, *Nonlinear Anal.* 70, 3076-3083.

[49] Z.H. Liu (2010), Anti-periodic solutions to nonlinear evolution equations, *J. Funct. Anal.* 258, 2026-2033.

[50] Q. Liu (2011), Existence of anti-peroidic mild solution for semilinear evolution equation, *J. Math. Anal. Appl.* 377 (1), 110-120.

[51] J.H. Liu et al (2015), Existence of anti-periodic mild solutions to semilinear nonautonomous evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.*, http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.043

[52] V.S. Melnik and J. Valero (1998), On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions, *Set-Valued Analysis* 6, 83-111.

[53] V.S. Melnik and J. Valero (2000), On global attractors of multivalued semiprocesses and nonautonomous evolution inclusions, *Set-Valued Analysis* 8, 375-403.

[54] K. S. Miller and B. Ross (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[55] F. Neubrander (1988), Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem, *Pacific J. Math.* 135 (1), 111–155.

[56] G.M. N'Guérékata and V. Valmorin (2012), Antiperiodic solutions of semilinear integrodifferential equations in Banach spaces, *Appl. Math. Comput.* 218, 11118–11124.

[57] G.M. N'Guérékata (2009), A Cauchy problem for some fractional abstract differential equation with nonlocal conditions, *Nonlinear Anal.* 70, 1873-1876.

[58] P.H.A. Ngoc (2015), Novel criteria for exponential stability of nonlinear differential systems with delay, *IEEE Trans. Automat. Control.* 60, no. 2, 485-490.

[59] V. Obukhovskii and J.-C. Yao (2010), On impulsive functional differential inclusions with Hille-Yosida operators in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 73, 1715-1728.

[60] H. Okochi (1988), On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations, *J. Math. Soc. Japan.* 40, 541–553.

[61] H. Okochi (1990), On the existence of anti-periodic solutions to a nonlinear evolution equation associated with odd subdifferential operators, *J. Funct. Anal.* 91, 246–258.

[62] H. Okochi (1990), On the existence of anti-periodic solutions to nonlinear parabolic equations in noncylindrical domains, *Nonlinear Anal.* 14, 771–783

[63] A. Pazy (1983), *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[64] I. Podlubny (1999), *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering. 198. Sandiego, CA: Academic Press.

[65] G. Raugel (2002), *Global Attractors in Partial Differential Equations*, In Handbook of dynamical systems, Vol. 2, pp. 885-892, North - Holland, Amsterdam.

[66] R. Sakthivel, R. Ganesh and S.M. Anthoni (2013), Approximate controllability of fractional nonlinear differential inclusions, *Appl. Math. Comput.* 225, 708-717.

[67] T.I. Seidman (1987), Invariance of the reachable set under nonlinear perturbations, *SIAM J. Control Optim.* 25 (5), 1173-1191.

[68] R.Schnaubelt (2001), Asymptotically autonomous parabolic evolution equations, *J. Evol. Equ.* 1, 19–37.

[69] H.B. Stewart (1974), Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 199, 141-162.

[70] Horst R. Thieme (1990), Semiflows generated by Lipschitz perturbations of non-densely defined operators, *Differential Integral Equations* 3(6), 1035-1066.

[71] Horst R. Thieme (1990), Integrated semigroups and integrated solutions to abstract cauchy problems, *J. Math. Anal. Appl.* 152, 416–447.

[72] A. Tolstonogov (2000), *Differential Inclusions in a Banach Space*, Translated from the 1986 Russian original and revised by the author. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[73] J. Valero (2000), Finite and infinite-dimensional attractor of multivalued reaction-diffusion equations, *Acta Math. Hungar.* 88:3, 239-258.

[74] J. Valero (2001), Attractors of parabolic equations without uniqueness, *J. Dynam. Differential Equations.* 13, 711-744.

[75] I.I. Vrabie (2003), *C_0-semigroups and applications*, North-Holland Mathematics Studies, 191. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[76] H. You and R. Yuan (2010), Global attractor for some partial functional differential equations with finite delay, *Nonlinear Anal.* 72, 3566-3574.

[77] W. Wang (2010), Generalized Hanalay inequality for stability of nonlinear neutral functional differential equations, *J. Ineq. Appl.*, ArtID 475019, 16 pages.

[78] R. N. Wang, D.-H. Chena and T.-J. Xiao (2012), Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators, *J. Differential Equations* 252, 202-235.

[79] Y. Wang (2010), Antiperiodic solutions for dissipative evolution equations, *Mathematical and Computer Modelling* 51, 715-721.

[80] R.N. Wang, Q.M. Xiang and P.X. Zhu (2014), Existence and approximate controllability for systems governed by fractional delay evolution inclusions, *Optimization* 63, 1191-1204.

[81] R. N. Wang and Q. H. Ma (2014), Some new results for multi-valued fractional evolution equations, *Appl. Math. Comput.* 257, 285-294.

[82] R.N. Wang, P.X. Zhu and Q.H. Ma (2015), Multi-valued nonlinear perturbations of time fractional evolution equations in Banach spaces, *Nonlinear Dyn.* 80, 1745-1759.

[83] Y. Zhou and F. Jiao (2010), Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations, *Nonlinear Anal.: Real World Applications* 11, 4465-4475.

[84] Y. Zhou and F. Jiao (2010), Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, *Comp. Math. Appl.* 59 (2010), 1063-1077.